எண்சார் கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

M. M. இராமசுவாமி



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் – 205

எண்சார் கணிதம்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

எம். எம். இராமசுவாமி,

புள்ளியியல் துறைத் தலைவர்,

பூ. சா. கோ. கலைக் கல்லூரி, கோவை



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—July, 1969

B.T.P. No. 205

NUMERICAL MATHEMATICS for B.Sc.

M. M. Ramaswamy

Price Rs. 5–50

Printed by
Manickam Press,
Madras-29

அணிந்துரை

(திரு செ. மாதவன், தமிழகக் கல்வி-தொழிலமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் மாணவர்க்குக் கலை, அறிவியல் பாடங்களைத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'எண்சார் கணிதம்'** என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 205ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 240 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. மாதவன்

பொருளடக்கம்

முன்னுரை

அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பினை [$f(x)$] ஐ பகுப்பாய்வதே எண்சார் கணிதமாகும் (Numerical Mathematics). நுண் கணிதத்தில் (calculus) சார்புகளின் அமைப்புகள் [$f(x)$] நமக்குத் தெரியும். அப்பொழுது சார்பின் மதிப்பு ஒரு இடத்தில் காணவேண்டின் $y = f(x)$ என்னும் சார்பில் மாறிக்கு மதிப்பிட்டுக் காண்கின்றோம். வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களையும், தொகையினையும் சில குறிப்பிட்ட சூத்திரங்களை உபயோகித்துக் காண இயலுகின்றது. ஆனால் அதே சார்பு சம அல்லது அசம இடைவெளியில், கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருக்கும் பொழுது நுண் கணிதத்தை நாம் பயன்படுத்த இயலுவதில்லை.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
... ...	... ...
... ...	... ...
... ...	... ...
$a+rh$	$f(a+rh)$

அல்லது இயற்கையில் நிகழும் பல நிகழ்ச்சிகளை எண்ணால் குறித்து அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருக்கலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து இடையில் சார்பின் மதிப்புகள் அறிய வேண்டியுள்ளது. பத்தாண்டுகளுக்கு ஒரு முறை மக்கட் தொகையைக் கணக்கிடுகிறார்கள். ஆனால் இந்த 10 ஆண்டுகளுக்கு இடையில் ஏதாவது ஒரு ஆண்டில் மக்கள் தொகையினை நேரடியாகக் காண இயலாது. அப்பொழுது அந்த ஆண்டின் தொகை என்ன இருந்திருக்கலாம் என்று இடைச்செருகல் மூலம் மதிப்பிடுகின்றோம். மேலும் பழைய அளவுகளைக் கொண்டு எதிர்காலத்தில் எந்த அளவில் இருக்கும் என்பதனையும் மதிப்பிடப்பட வேண்டியுள்ளது. புள்ளியலில் பல்வேறு அட்டவணைகள் உபயோகப் படுத்தப்பட வேண்டியுள்ளது. அப்படிப் பயன்படுத்தும்பொழுது இரண்டு மதிப்புகளுக்கிடையில் உள்ள மதிப்புகளைக் காணவேண்டியுள்ளது.

இச்சமயங்களிலெல்லாம் இடைச்செருகல் மூலம் தேவையான மதிப்புகளைக் கணக்கிடுகின்றோம். பல சமன்பாடுகளை எளிதாகத் தீர்க்க இயலுவதில்லை. அப்பொழுது எண்ணியல் தீர்வு முறையினைப் பின்பற்றுகின்றோம்.

எண்சார் கணிதத்தில், அட்டவணையிலிருந்து சார்பினை மதிப்பிடுகின்றோம். சார்பினை நாம் எந்த அளவுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையுடன் சரியாகப் பொருந்துமாறு மதிப்பிடுகின்றோமோ அந்த அளவுக்கு நாம் கணக்கிடும் இடைநிலை மதிப்புகள், வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்கள், தொகைகள் முதலியன மிகச்சரியாக இருக்கும். சார்புகளை மதிப்பிடும் பொழுது, அட்டவணையில் அவைகள் n இடங்களில் மதிப்பிடப் பட்டிருந்தால், அவைகளை n-ஆவது படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதிக் கொள்கின்றோம். இப்படிக் கருதும்பொழுது சில சமயங்களில் சரியில்லாமல் இருக்கலாம். எனினும் நாம் செய்யும் பிழை சிறிதெனக் கொள்ளினும் நுண்ணியற் கணக்கில் நாம் அடையும் சரியான மதிப்புகளை எண்சார் கணிதத்தில் அடைவது கடினம். சார்புகளைச் சரியாக மதிப்பிட்டு விட்டால் நாம் கணக்கிடும் மதிப்புகளும் மிகமிகச் சரியாயிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக $f(x)$ என்னும் சார்பின் வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் காண முதலில் சார்பினை வகைப் படுத்துகிறோம். பிறகு x-க்கு மதிப்பிடுகிறோம்.

$[f'(x)]_{x=a}$ ன் மதிப்பைப் பெறுகின்றோம். இதேபோல் குறிப்பிட்ட சில முறைகளை உபயோகித்துத் தொகைகளையும்

பெறுகின்றோம். ஆனால் எண்சார் கணிதத்தில் முதலில் சார்பின் (functional form) அமைப்பினைக் கணக்கிட்டு நுண்ணியற் கணக்கு முறையில் வேண்டிய மதிப்புகளைப் பெறுகின்றோம். எனவே எண்சார் கணிதத்தினால் இடை மதிப்புகளையும், வெளி மதிப்புகளையும், வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களையும், தொகைகளையும், அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ள சார்பிலிருந்து கணக்கிடுகின்றோம்.

கீழ்க் கண்ட குறியீடுகள் இப்புத்தகத்தில் உபயோகிக்கப் பட்டுள்ளன.

$$_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}$$

$$n! = n\,(n-1)\ldots\ldots 3\,.\,2\,.\,1$$

$f(x)$: x-ல் அமைந்துள்ள சார்பு.

$f'(x)$: முதலாவது வகை வேறுபாடு

$f''(x)$: இரண்டாம் வகை வேறுபாடு

1. சம இடைவெளிக்கு இடைச் செருகல்

(Interpolation for Equal Intervals)

மாறி x-ன் பல தொடர்ந்த மதிப்புகளுக் குரிய சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் x-ன் ஒரு இடைப்பட்ட மதிப்பிற்குரிய $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காணும் முறைக்கு 'இடைச் செருகல்' எனப்படும்.

இடைச் செருகல் காணும் இயலைக் கணித அட்டவணையின் இரு கோடுகளுக்கிடையே படிக்க உதவும் அறிவியல் எனக் கூறலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக, கீழ்வரும் அட்டவணையைக் கவனிக்க. இதில் மாறி x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பு $f(x) = e^{-x}$-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

x	$f(x)$
0·5	0·6065
1·0	0·3679
1·5	0·2231
2·0	0·1353
2·5	0·0821

மேற்கண்ட ஐந்து மதிப்புகள் மட்டுமே சார்பின் அமைப்பைக் குறிக்கும் வகையில் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் போது, அதாவது, $f(x)$-ன் உண்மையான அமைப்பு e^{-x} எனத் தெரியாத போது, $x = 0·752$ க்கு உரிய சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண நாம் விழையலாம்.

இதற்கு நாம் 'இடைச் செருகல்' முறையைப் பயன் படுத்த வேண்டும். முதலில் சார்பின் அமைப்பைக் காண வேண்டும். அதில் x-ன் மதிப்பை (0·752)ப் பிரதியிட, சார் பின் மதிப்பீடு கிடைக்கும். சார்பின் அமைப்பைக் காண, x-ன் மாற்றங்களுக்குத் தக்க (differences) சார்பின் வேறுபாடு களைக் காணவேண்டும். சார்பின் வேறுபாடுகள் காண இரு புதிய செயலிகளை (operators) இங்கு அறிமுகப் படுத்துவோம்.

செயலிகள் E, △ ஆகியவற்றின் வரையறை (Definition): கணிதத்தில் கணக்குகளைப் போட கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்ற செயல்களைச் செய்கிறோம். இவற்றிற்குச் செயலிகளாக +, −, ×, ÷ ஆகியவற்றைப் பயன் படுத்துகிறோம். இது போலவே, எண்ணியற் கணிதத் திலும் △, E என்ற இரு புது செயலிகளைக் காண்போம். சார்பின் அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புகளின் வேறுபாட்டைக் காணச் செயலி △ பயன்படுகிறது. சார்பின் ஒரு மதிப்பு இருக்கும் போது, அதன் அடுத்த மதிப்பைக் காணச் செயலி E பயன்படுகிறது.

எண்சார் கணிதத்தில் மாறி, 'சார்பின்மாறி' (argument) எனவும், சார்பு மதிப்பு 'சார்பலன்' (Entry) எனவும் கூறப்படு கின்றன. $a, a+h, a+2h, a+3h, \ldots\ldots$ ஆகியவை மாறி x-ன் மதிப்புகளானால், இவற்றிற்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, $f(a+3h)$ ...... ஆகும்.

வரையறைப்படி,

$$\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$$

$$\triangle f(a+h) = f(a+2h) - f(a+h)$$

இதுபோலவே,

$$E f(a) = f(a+h)$$

$$E f(a+h) = f(a+2h)$$

எனவே, பொதுவாக எழுதினால்,

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$E f(x) = f(x+h)$$

என ஆகும். இங்கு h என்பது மாறி மதிப்புகளின் சம இடை வெளியாகும்.

மேற் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$
... ...	... ...
... ...	... ...

மேற்கண்ட வேறுபாடுகள்

$$\triangle f(a),\ \triangle f(a+h),\ \triangle f(a+2h),\ \triangle f(a+3h) \ldots\ldots$$

முதல் நிலை வேறுபாடுகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. இந்த வேறுபாடுகளுக்கும் வேறுபாடுகளை நாம் கீழ்க்கண்டவாறு காணலாம்.

$$\triangle[\triangle f(a)] = \triangle[f(a+h)-f(a)]$$
$$= \triangle f(a+h) - \triangle f(a)$$
$$\triangle[\triangle f(a+h)] = \triangle[f(a+2h)-f(a+h)]$$
$$= \triangle f(a+2h) - \triangle f(a+h)$$

இந்த வேறுபாடுகளை முறையே $\triangle^2 f(a)$, $\triangle^2 f(a+h)$ எனவும் எழுதலாம். இவைகள் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே, பொதுவாக, சார்பு $f(x)$-ன் n-ஆம்படி வேறுபாட்டை $\triangle^n f(x)$ என எழுதலாம்.

$\triangle$-க்கும் E-க்கும் உள்ள தொடர்பு :—

வரையறைப்படி

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad (1)$$
$$\mathrm{E}\ f(x) = f(x+h) \qquad (2)$$

என அறிவோம்.

(1)-ம் சமன்பாட்டில் $f(x+h)$ க்குப் பதிலாக $\mathrm{E} f(x)$ என எழுத,

$$\triangle f(x) = \mathrm{E} f(x) - f(x) \text{ என வருகிறது.}$$
$$= (\mathrm{E}-1) f(x).$$

ஆகவே, $f(n)$ நீங்கலாக,

$$\triangle \equiv (E-1) \quad \text{அல்லது}$$

$$E \equiv 1+\triangle \quad \text{என எழுதலாம்.}$$

இதுவே, E-க்கும், $\triangle$-க்கும் உள்ள தொடர்பாகும்.

$\triangle$, E ஆகியவற்றிற்குள்ள மேற்கண்ட தொடர்பில் சமக் கோடு பயன்படுத்தப்படவில்லை. ஏனெனில், $\triangle$வும், E யும் வெறும் குறிகளே. எண்களைப்போல் குறிகளைச் சமப்படுத்த முடியாது.

இவ்விரு செயலிகளும் கீழ்க்கண்ட மூன்று இயல் விதிகளைப் பின்பற்றுகின்றன.

முதலில் $\triangle$-யைக் கவனிக்க.

1. பங்கீட்டு விதி :— (Distributive law)

$$\triangle [f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)]$$
$$=\triangle f_1(x)+\triangle f_2(x)+\ldots\ldots+\triangle f_n(x).$$

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned}\triangle [f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)] &= [f_1(x+h)+f_2(x+h)+\ldots\ldots+f_n(x+h)]\\ &\quad - [f_1(x)+f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)]\\ &= [f_1(x+h)-f_1(x)+f_2(x+h)-f_2(x)\\ &\quad +\ldots\ldots+f_n(x+h)-f_n(x)]\\ &= \triangle f_1(x)+\triangle f_2(x)+\ldots\ldots+\triangle f_n(x).\end{aligned}$$

2. பரிமாற்று விதி :— (மாறிலியைப் பொறுத்தமட்டும்). (Commutative law)

k மாறிலி எனக் கொண்டால்,

$\triangle [k f(x)] = k \triangle f(x)$ ஆகும்.

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned}\triangle [k f(x)] &= [k f(x+h) - k f(x)]\\ &= k [f(x+h)-f(x)]\\ &= k \triangle f(x).\end{aligned}$$

3. அடுக்குகளின் விதி :— (Law of Indices)

$$\triangle^m [\triangle^n f(x)] = \triangle^{(m+n)} f(x)$$

நிருபணம் :

$\triangle^m [\triangle^n f(x)]$

$= (\triangle \cdot \triangle ......m$ தடவைகள்$) (\triangle , \triangle ......$ n தடவைகள்$) f(x)$

$= [\triangle \cdot \triangle ......(m+n)$ தடவைகள்$] f(x)$

$= \triangle^{(m+n)} f(x).$

இதுபோலவே,

$$\triangle [\triangle^{-1} f(x)] = f(x)$$

மேலும்,

$$\triangle^n [\triangle^{-n} f(x)] = f(x)$$

இவ்வாறே செயலி E க்கும் காணலாம்.

1. பங்கீட்டு விதி :— (Distributive law)

$$E [f_1(x)+f_2(x)+......+f_n(x)]$$
$$= E f_1(x)+E f_2(x)+......+E f_n(x)$$

2. பரிமாற்று விதி :— (மாறிலிக்குமட்டும்)

$$E [k \cdot f(x)] = k \cdot E f(x).$$

3. அடுக்குகளின் விதி :

$$E^m [E^n f(x)] = E^{(m+n)} f(x)$$

விதிவிலக்குகள் (Exceptional cases).

(i) செயலி $\triangle$ பரிமாற்று விதியை, மாறியைப் பொறுத்துப் பின்பற்றுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\triangle (x^2-6n+8) = \triangle [(x-2)(x-4)]$$
$$\neq (x-2) \triangle (x-4).$$

அதாவது, பொதுவாக, $\triangle [f_1(x) f_2(x)] \neq f_1(x) \triangle f_2(x).$

(ii) இயற் கணிதத்தில் AB = 0 ஆனால் A அல்லது B பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும். ஆனால், இங்கு எண்ணியற் கணிதத்தில் $\triangle$ வைப் பொறுத்த மட்டில் அப்படி யில்லை. $\triangle^2 f(x) = 0$ என்றால், $\triangle f(x)$ பூச்சியமாக இருக்க வேண்டுமென்ற அவசியமில்லை.

மாதிரி 1.

$$\triangle \log x = \log \left[1 + \frac{\triangle f(x)}{f(x)}\right]$$

என நிரூபிக்க.

$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$ என அறிவோம்,

இதை $f(x+h) = \triangle f(x) + f(x)$ என அல்லது

$\dfrac{f(x+h)}{f(x)} = \dfrac{\triangle f(x)}{f(x)} + 1$ என எழுதலாம்.

இதன் மடக்கை (log)

$$\log f(x+h) - \log f(x) = \log \left[\frac{\triangle f(x)}{f(x)} + 1\right]$$

இதையே

$$\triangle \log f(x) = \log \left[1 + \frac{\triangle f(x)}{f(x)}\right]$$

என எழுதலாம்.

மாதிரி 2.

$f(x) = \sin x$ என்றால்

$\triangle^2 f(x) = k \mathrm{E} f(x)$ எனக் காட்டுக.

குறிப்பு: இங்கு k என்பது மாறிலி.

$f(x) = \sin x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இங்கு $h = 1$ எனக் கொண்டால்

$$\triangle f(x) = \sin(x+1) - \sin x$$

$$= 2 \cos (x+\tfrac{1}{2}) \sin (\tfrac{1}{2})$$

இது போலவே

$$\Delta^2 f(x) = (2\sin\tfrac{1}{2})\,[\cos(x+\tfrac{3}{2}) - \cos(x+\tfrac{1}{2})]$$
$$= (2\sin\tfrac{1}{2})(-2)\sin(x+1)\sin(\tfrac{1}{2})$$
$$= (-1)(2\sin\tfrac{1}{2})^2\sin(x+1)$$
$$= k\,\mathrm{E}\sin x$$
$$= k\,\mathrm{E}\,f(x)$$

இங்கு மாறிலி $k = (-1)(2\sin\frac{1}{2})^2$

மாதிரி 3.

வேறுபாட்டு இடைவெளி h ஆனால்

$\Delta \tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{h}{1+xh+x^2}\right)$ என நிரூபிக்க.

$$\therefore \quad \Delta \tan^{-1}(x) = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x$$

இரு பக்கங்களை tan ஆல் பெருக்க

$$\tan(\Delta \tan^{-1} x) = \tan[\tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x]$$

$$\therefore \quad \tan(\Delta \tan^{-1} x) = \frac{\tan(\tan^{-1}(x+h)) - \tan(\tan^{-1} x)}{1+\tan(\tan^{-1}(x+h))\tan(\tan^{-1} x)}$$
$$= \frac{(x+h)-x}{1+(x+h)x}$$
$$= \frac{h}{1+xh+x^2}$$

ஆகவே

$$\Delta \tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{h}{1+xh+x^2}\right)$$

மாதிரி 4.

$\left(\dfrac{\Delta^2}{\mathrm{E}}\right) f(x)$, $\dfrac{\Delta^2 f(x)}{\mathrm{E}\,f(x)}$ ஆகிய இவ்விரண்டிற்கு முள்ள வித்தியாசத்தை விளக்குக. இதில் $f(x) = x^3$ ஆனால் இவ்விரண்டு மதிப்புகளைக் காண்க.

$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) f(x)$ என்பது x-ன் ஒரு சார்பு. மேலும் இது இதன் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் மாறி, x-ன் சார்புகள் கொண்டது அல்ல.

ஆகையால் $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) f(x) = (\Delta^2 E^{-1}) f(x)$

$$= (E-1)^2 (E^{-1}) f(x)$$
$$= (E-2+E^{-1}) f(x)$$
$$= f(x+1) - 2 f(x) + f(x-1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(I)}$$

ஆனல் $\frac{\Delta^2 f(x)}{E f(x)}$ என்பது பகுதியிலும் தொகுதியிலும் x-ன் ஒவ்வொரு சார்பைக் கொண்டது.

$$\therefore \quad \frac{\Delta^2 f(x)}{E f(x)} = \frac{(E-1)^2 f(x)}{E f(x)} = \frac{f(x+2) - 2 f(x+1) + f(x)}{f(x+1)}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(II)}$$

இந்த இரண்டு I, II சமன்பாடுகளும் சமமற்றவை எனக் காண்கிறோம்.

இதையே கீழ்வரும் மாதிரியால் விளக்கலாம்.

$f(x) = x^3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) f(x) = f(x+1) - 2 f(x) + f(x-1)$$
$$= (x+1)^3 - 2x^3 + (x-1)^3$$
$$= 6x$$

இது போலவே

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{E f(x)} = \frac{f(x+2) - 2 f(x+1) + f(x)}{f(x+1)}$$
$$= \frac{(x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{6}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \quad 6x \neq \frac{6}{(x+1)^2}$$

அதாவது $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) f(x) \neq \frac{\Delta^2 f(x)}{E f(x)}$

வேறுபாடுகளின் அட்டவணை : (Difference Table)

மாறியின் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் கீழ்க் கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$$x : \quad a \qquad a+h \qquad a+2h \quad \ldots\ldots$$

$$f(x) : \quad f(a) \qquad f(a+h) \qquad f(a+2h) \ldots\ldots$$

சார்பின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் அதற்குப் பிந்திய மதிப்பி லிருந்து கழித்து $f(x)$–ன் முதல் நிலை வேறுபாடுகளைக் காண லாம். அதாவது, $f(a+h) - f(a)$, $f(a+2h) - f(a+h)$, $f(a+3h) - f(a+2h)$ என்பனவற்றைக் காணலாம்.

இவற்றை முறையே $\Delta f(a)$, $\Delta f(a+h)$, $\Delta f(a+2h)$ என எழுதி, முதல் நிலை வேறுபாடுகள் (First order differences) என அழைக்கிறோம்.

இந்த முதல் நிலை வேறுபாடுகளை $[\Delta f(x)]$ இவற்றிற்குப் பிந்திய வேறுபாடுகளிலிருந்து $[(\Delta f(a+h)]$ கழித்து இரண் டாம் நிலை (Second order differences) வேறுபாடுகளைக் காண லாம்.

அதாவது,

$$\Delta f(a+h) - \Delta f(a), \; \Delta f(a+2h) - \Delta f(a+h),$$

என்பனவற்றைக் காணலாம்.

இவற்றை முறையே $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^2 f(a+h)$ ...... என எழுதி, இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் என அழைக்கிறோம். இது போலவே மற்ற உயர்நிலை வேறுபாடுகளையும் காண லாம். இவ்வாறு கண்டு பிடித்த மாறுபட்ட நிலையுள்ள வேறு பாடுகளை ஒரு ஒழுங்கான முறையில் கீழ்க்கண்டவாறு

அமைத்தால் நமக்குக் கிடைப்பதே வேறுபாடுகளின் அட்டவணை (Difference Table) ஆகும்.

மாறி x	சார்பு (x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
a	$f(a)$	$\Delta f(a)$	$\Delta^2 f(a)$	$\Delta^3 f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$	$\Delta f(a+h)$	$\Delta^2 f(a+h)$	
$a+2h$	$f(a+2h)$	$\Delta f(a+2h)$		
$a+3h$	$f(a+3h)$			

மேற்கண்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணையில் $f(a)$ என்பது முன்-உறுப்பு எனவும், $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$ என்ற வேறுபாடுகள் முன்னணி வேறுபாடுகள் (leading differences) எனவும், கூறப்படும். இவை இறங்கு வேறுபாடுகள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. அதே நேரத்தில், $(a+3h)$ என்பது n-ன் கடைசி மதிப்பானல், $\Delta f(a+2h)$, $\Delta^2 f(a+h)$, $\Delta^3 f(a)$ என்பவை ஏறு வேறுபாடுகள் அல்லது பிற்போக்கு வேறுபாடுகள் (Backward differences) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. வேறுபாடுகளின் அட்டவணையினை அமைக்கக் கீழ்வருவது ஒரு எடுத்துக் காட்டாகும்.

மாதிரி : 5

கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளுக்கு ஒரு வேறுபாட்டு அட்டவணையினை அமைக்கவும். இந்த அட்டவணையை விரிவுபடுத்தி $f(5)$-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிடவும்.

x	$f(x)$
0	79
1	91
2	105
3	116
4	127

இதன் வேறுபாட்டட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
0	79				
		12			
1	91		2		
		14		−5	
2	105		−3		8
		11		−3	
3	116		0		8
		11		11	
4	127		11		
		22			
5	149				

முதலில் x-ன் 0, 1, 2, 3, 4 என்ற கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு உரிய வேறுபாடுகளின் அட்டவணை அமைக்கப் பட்டுள்ளது. பின்னர், எல்லா நான்காம் நிலை வேறுபாடுகளும் $[\triangle^4 f(x)]$ 8-க்குச் சமம் எனக் கொண்டு, கடைசியிலிருந்து ஒவ்வொன்ருகக் கூட்டி இந்த அட்டவணையை அதிகரித்து $f(5)=149$ எனக் காண்கிரேம். x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\triangle^4 f(x)=8$ என்பதால், மேலும் ஒரு 8-ஐ $\triangle^4 f(x)$ க்குரிய 6-ஆம் வரிசையில் எழுதுகிரேம். இந்த இரண்டாவது 8, 3-க்கும் 11-க்கும் உள்ள வேறுபாடாகும். இதுபோலவே மற்ற எண்கள் 11, 22, 149 என்பவையும், ஒவ்வொன்ருகக் கூட்டிக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளன. முதலில் $8+3=11$ எனக் கண்டது போல $11+0=11$; $11+11=22$; $22+127=149$ எனக் காண்கிரேம். ஆகவே $f(5)=149$.

மாதிரி 7:

$$\triangle^r \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a}{2}\right)^r \sin\left[ax+b+\frac{r}{2}(a+\pi)\right]$$

என்று காட்டுக.

$$\triangle \sin(ax+b) = \sin(a\overline{x+1}+b) - \sin(ax+b)$$

$$= 2\cos\left(ax+b+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(ax+b+\frac{a+\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ என்பது ஒரு மாறிலி. ((constant)

$$\triangle^2 \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a}{2}\right)\sin\left[a\overline{x+1}+b+\frac{a+\pi}{2}\right] -$$

$$\sin\left[ax+b+\frac{a+\pi}{2}\right]$$

$$= \left(2\sin\frac{a}{2}\right) 2\cos\left(ax+b+\frac{2a+\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{a}{2}\right)^2 \sin\left[ax+b+2\left(\frac{a+\pi}{2}\right)\right]$$

இதேபோல,

$$\triangle^r \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a}{2}\right)^r \sin\left[ax+b+r\left(\frac{a+\pi}{2}\right)\right]$$

ஒரு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட சார்பின் n-வது வேறுபாடுகளை, அடுத்தடுத்த மதிப்புகளின் மூலம் எழுதுக.

$f(x)$ ஐ x-ன் சார்பாக வைக்கவும். $f(x)$-ன் n-வது வேறுபாடு $\triangle^n f(x)$.

ஆனால் $\triangle^n f(x) = (E-1)^n f(x)$

$$= \left[E^n - \binom{n}{1}E^{n-1} + \binom{n}{2}E^{n-2} \ldots\ldots + (-1)^n\right] f(x)$$

$$= f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+\overline{n-1}\,h) + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n f(x)$$

h = இடை வெளித்தூரம். எனவே, n-வது வேறுபாட்டை இவ்வாறு அடுத்தடுத்து மதிப்புக்களின் மூலம் எழுதலாம். இந்த சூத்திரத்தின் உபயோகங்களைக் கீழ்க்கண்ட மாதிரிகள் மூலமாக விளக்கலாம்.

$f(x)$-ன் n-வது வேறுபாட்டைக் காண்பதற்கு மாதிரி :

$f(51)$-ன் 3 வது வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுக.

x	$f(x)$
51	132651
52	140608
53	148877
54	157464

$f(x)$-ன் மூன்ரும் நிலை வேறுபாடுகளை

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

என எழுதுகிரேம்.

இதில் $x = 51$, $h = 1$ எனப் பிரதியிட

$$\Delta^3 f(51) = f(54) - 3f(53) + 3f(52) - f(51)$$
$$= 157464 - 3(148877) + 3(140608) - 132651$$
$$= 6$$

தேற்றம்

n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் n ஆம் நிலை வித்தியாசங்கள் மாறிலியாகவும், அதன் $(n+1)$-ஆம் நிலை வித்தியாசங்கள் பூச்சியமாகவும் ஆகின்றன.

x, $f(x)$ ஆகியவற்றை முறையே மாறி எனவும் அதன் n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை என்வும் கொள்க.

$$\therefore \quad f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n$$

என எழுதலாம்.

$f(x)$-ன் முதல் நிலை வித்தியாசத்தைக் கருதுக.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$= A_0 (x+h)^n + A_1 (x+h)^{n-1} + A_2 (x+h)^{n-2} + \ldots\ldots + A_n$$
$$- [A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n]$$
$$= A_0 \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots\ldots + h^n \right]$$

$$+ A_1\left[x^{n-1}+\binom{n-1}{1}x^{n-2}h+\ldots\ldots\right]$$
$$+ A_2[x^{n-2}+\ldots\ldots]$$
$$+ A_n$$
$$-[A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots\ldots+A_n]$$

கடைசித் தொடரில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதற்கும் மேலே உள்ள ஈருறுப்புத் தொடர்களின் முதல் உறுப்புகளுக்குச் சமமாக, அதே சமயத்தில் எதிராகவும் (negative) உள்ளன.

$$\therefore\quad \triangle f(x)=A_0\binom{n}{1}h\,x^{n-1}+\left[A_0\binom{n}{2}h^2+A_1\binom{n-1}{1}h\right]x^{n-2}$$
$$+\ldots\ldots+(A_0h^n+A_1h^{n-1}+\ldots\ldots+A_{n-1}h)$$
$$=B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots\ldots+B_n$$

இங்கு $B_1=A_0\binom{n}{1}h$, $B_2=\left[A_0\binom{n}{2}h^2+A_1\binom{n-1}{1}h\right]$

$$\ldots\ldots\ B_n=[A_0h^n+A_1h^{n-1}+\ldots\ldots+A_{n-1}h]$$

ஆகவே ஒரு முறை வேறுபாடு காண்பதால் n-ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை $(n-1)$ ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக மாறுகிறது எனக் காண்கிறோம்.

$f(x)$-ன் இரண்டாம் நிலை வேறுபாட்டைக் கருதுக.

$$\triangle^2 f(x)=\triangle[\triangle f(x)]=\triangle f(x+h)-\triangle f(x)$$
$$=B_1(x+h)^{n-1}+B_2(x+h)^{n-2}+\ldots\ldots+B_n$$
$$-[B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots\ldots+B_n]$$
$$=B_1\left[x^{n-1}+\binom{n-1}{1}x^{n-2}h+\ldots\ldots+h^{n-1}\right]$$
$$+B_2\left[x^{n-2}+\binom{n-2}{1}x^{n-3}h+\ldots\ldots+h^{n-2}\right]$$
$$+\ldots\ldots+\ldots\ldots$$
$$+B_n$$
$$-[B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots\ldots+B_n]$$

$$\triangle^2 f(x) = B_1 \binom{n-1}{1} hx^{n-2} + \ldots\ldots + [B_1 h^{n-1} + \ldots\ldots + B_{n-1} h]$$

$$= C_2\, x^{n-2} + C_3\, x^{-3} + \ldots\ldots + C_n$$

இது $(n-2)$-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை.

இங்கு $C_2 = B_1 \binom{n-1}{1} h$

$$= A_0\, n\, (n-1)\, h^2$$

இதுபோலவே n-ஆம் நிலை வித்தியாசம்

$$\triangle^n f(x) = A_0\, (n)\, (n-1)\, (n-2) \ldots\ldots 2\,.\,1\,.\, h^n$$

$$= A_0\, n\,!\, h^n$$

என்ற மாறிலி ஆகக் காண்கிறோம்.

இதனால் $f(x)$-ன் எல்லா n ஆம் நிலை வித்தியாசங்களும் மாறாத எண் $(A_0\, n\,!\, h)$ ஆக இருக்கும் என அறிகிறோம்.

அதாவது $\triangle^n f(a) = 0$

$a,\ a+h,\ a+2h$ என்பன x–ன் பல வேறுபட்ட மதிப்புகளானால், பிறகு

$$\triangle^n f(a) = \triangle^n f(a+h) = \triangle^n f(a+2h) = \ldots\ldots$$

$$= A_0\, n\,!\, h^n$$

இவ்வாறு n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-ஆம் நிலை வித்தியாசங்கள் எல்லாம் மாறிலியாக இருப்பதால் அவற்றிற்கு அடுத்த $(n+1)$ ஆம் வித்தியாசங்கள் யாவும் பூச்சியம் ஆகும்.

மாதிரி 1.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 12\,; \quad 0 \leq x \leq 1$$

என்றால் இடைவெளி 0·1 எனக் கொண்ட x-ன் மதிப்புகளுக்கு உரிய வித்தியாசங்களின் அட்டவணை அமைத்து மேற்கூறிய கொள்கையின் உண்மையைக் காண்க.

(ஏப்ரல் 1965)

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு, $f(x)$ மூன்றாம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை. ஆகவே மூன்றாம் நிலை வித்தியாசங்கள் எல்லாம்

மாறிலி எனவும் நான்காம் நிலை வித்தியாசங்கள் எல்லாம் பூச்சியம் எனவும் உள்ளனவா என்று பார்க்க வேண்டும்.

x-ன் 0, 0·1, 0·2, ... 1·0 என்ற மதிப்புகளுக்கு உரிய $f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் காண கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்கிறோம்.

x	x^3 +	$3x^2$	+ $5x$	+12	= $f(x)$
0	0	0	0	12	12·000
0·1	0·001	0·03	0·5	12	12·531
0·2	0·008	0·12	1·0	12	13·128
0·3	0·027	0·27	1·5	12	13·797
0·4	0·064	0·48	2·0	12	14·544
0·5	0·125	0·75	2·5	12	15·375
0·6	0·216	1·08	3·0	12	16·296
0·7	0·343	1·47	3·5	12	17·313
0·8	0·512	1·92	4·0	12	18·432
0·9	0·729	2·43	4·5	12	19·659
1·0	1·000	3·00	5·0	12	21·000

இக்கொள்கையைச் சரிபார்க்க முதல் ஆறு மதிப்புகளை, $f(0)$லிருந்து $f(0·5)$ வரை கருதினால் போதுமானது. ஆனால் இங்கு உள்ள 11 மதிப்புகளையும் கருதி கீழ்க்கண்ட வித்தியாசங்களின் அட்டவணை அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அட்டவணையில் தசமப்புள்ளி கருதப்படவில்லை. இதில் எல்லா 4-ஆம் நிலை வித்தியாசங்களும் பூச்சியம் எனக் காண்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	12000				
		531			
0·1	12531		66		
		597		6	
0·2	13128		72		0
		669		6	
0·3	13797		78		0
		749		6	
0·4	14544		84		0
		831		6	
0·5	15375		90		0
		921		6	
0·6	16296		96		0
		1017		6	
0·7	17313		102		0
		1119		6	
0·8	18432		108		0
		1227		6	
0·9	19659		114		
		1341			
1·0	21000				

கொடுக்கப்பட்ட சார்பலன்களின் தொகுதியில் ஏதேனும் ஒன்று அல்லது இரண்டு மதிப்புகள் விட்டுப் போயிருப்பின், n-ஆவது வேறுபாட்டைக் காணும் சூத்திரத்தையும் மேற்கண்ட தேற்றத்தையும் பயன்படுத்தி, அவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம். ஆனால் கணக்கிடவேண்டிய $f(x)$-ன் மதிப்பிற்குரிய x-ன் மதிப்பைக் கொடுத்த கணக்கில் உரிய இடத்தில் சேர்க்க, மாறிக்கு சம இடைவெளித் தூரம் கிடைக்கும்போது மட்டுமே இந்த முறை பயன்படும்.

மாதிரி 2. $f(x)$-ன் விட்டுப்போன மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

x	$f(x)$
0	1
2	9
4	—
6	97

மூன்று மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், $f(x)$ ஐ இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாக வைத்துக் கொள்கிறோம். எனவே $\Delta^3 f(x)=0$ என்று எழுதலாம்.

அதாவது $(E-1)^3 f(x)=[E^3-3E^2+3E-1]f(x)=0$

$$=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)=0.$$

இங்கே, $h=2$. $x=0$ என வைப்போம்.

அப்பொழுது, $f(6)-3f(4)+3f(2)-f(0)=0.$

$$97-3f(4)+(3\times 9)-1=0.$$

$$\therefore\ f(4)=41.$$

மாதிரி 3. $f(5)$ & $f(6)$ ன் மதிப்புக்களை, கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து கண்டுபிடிக்க :

$$f(1)=11;\ f(2)=41;\ f(3)=169;\ f(4)=515;$$

$$f(7)=4781.$$

5 மதிப்புக்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(x)$ ஐ ஒரு நான்காவது படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாக வைத்துக் கொள்வோம். ஆகவே, $\Delta^5 f(x)=0$

அதாவது, $(E-1)^5 f(x) = f(x+5h) - 5f(x+4h) + 10f(x+3h)$
$$- 10f(x+2h) + 5f(x+h) - f(x) = 0$$

$x = 1,\ 2$ மற்றும் $h = 1$ ஆகும்பொழுது,

$$f(6) - 5f(5) + 10f(4) - 10f(3) + 5f(2) - f(1) = 0$$

$$f(7) - 5f(6) + 10f(5) - 10f(4) + 5f(3) - f(2) : 0$$

என்று கிடைக்கிறது. (அல்லது)

$$f(6) - 5f(5) + 10 \times 515 - 10 \times 169 + 5 \times 41 - 11 = 0$$

$$4781 - 5f(6) + 10 \times f(5) - 10 \times 515 + 169 \times 5 = 0$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்தால், $f(5) = 1247$; $f(6) = 2581$ என்ற மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

மாதிரி 4.

$$f(0) = 1$$
$$f(1) + f(2) = 10$$
$$f(3) + f(4) + f(5) = 65$$

என்றால் $f(4)$-ன் மதிப்பைக் காண்க,

குறிப்பு:—இரண்டாம் நிலை வேறுபாடு மாறிலி எனக் கொள்க.

மாறி x–ன் சார்பு, $f(x)$ எனக் கொள்க.

மேலும் $f(1) = f$
$f(2) = g$
$f(3) = h$
$f(4) = j$
$f(5) = k$ எனக் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு கீழ்வரும் வித்தியாசங்களின் அட்டவணை அமைக்கலாம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	=	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
0	1	$f-1$		$f-1$	a
1	f	$g-f$		$f-1+a$	a
2	g	$h-g$		$f-1+2a$	a
3	h	$j-h$		$f-1+3a$	a
4	j	$k-j$		$f-1+4a$	
5	k				

இந்த அட்டவணையிலிருந்து கீழ் வருமாறு பெறுகிறோம்.

(i) $g - f = f - 1 + a$

அதாவது $g - 2f + 1 = a$

அதாவது $10 - 3f + 1 = a$ $(\because \; g + f = 10)$

$\therefore \; a + 3f = 11$ (1)

(ii) $h - g = f - 1 + 2a$

$g = 10 - f$ எனப் பிரதியிட

$h = 9 + 2a$ (2)

(iii) $j - h = f - 1 + 3a$

h-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$j = f + 5a + 8$ (3)

(iv) $k - j = f - 1 + 4a$

j-க்குப் பிரதியிட

$k = 2f + 9a + 7$ (4)

(2), (3), (4) ஆகிய சமன் பாடுகளிலிருந்து

$h + j + k = 24 + 16a + 3f$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனால் $h + j + k = 65$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad 16a + 3f = 41 \qquad (5)$$

$$a + 3f = 11 \qquad (1)$$

இவற்றிலிருந்து $a = 2,\ f = 3$ எனக் கிடைக்கின்றன.

$$\therefore \quad f(4) = j = 21.$$

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம். (Newton's Forward Formula).

X, $f(X)$ என்பன முறையே கொடுக்கப்பட்ட மாறி எனவும் சார்பு எனவும் கொள்க.

$a,\ a+h,\ a+2h$ ...... என்ற மாறியின் மதிப்புகளுக்கு உரிய சார்பின் மதிப்புகள் $f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h)$ ...... எனக் கொள்க.

x-ஐ புது மாறி எனக் கொண்டால் இதன் 0, 1, 2, 3, ... என்ற மதிப்புகளை $X = a + xh$ லிருந்து பெறலாம்.

$$E\, f(a) = f(a+h)$$
$$E^2 f(a) = E f(a+h) = f(a+2h)$$

என அறிவோம்.

இது போலவே $E^x f(a) = f(a + xh)$

மேலும் $E \equiv 1 + \triangle$ என்பதால்

$$f(a+xh) = E^x f(a)$$
$$= (1+\triangle)^x f(a)$$
$$= f(a) + \binom{x}{1} \triangle f(a) + \binom{x}{2} \triangle^2 f(a) + \ldots\ldots + \triangle^x f(a)$$

என எழுதலாம்.

இதுதான் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம். (Newton's Forward Formula).

தொகுத்தறி முறையில் (Inductive Method) இதை நிரூபிப்போம்.

இச்சூத்திரம் $x = n$ க்கு மெய்யாகிறது எனக் கொள்க. ஆகவே கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(a+nh) = f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \Delta^n f(a)$$

$f(a + \overline{n+1}\, h)$ ஐக் கருதுக.

$$f(a+\overline{n+1}\,h) = f(a+nh) + \Delta f(a+nh)$$

$$= f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots + \ldots\ldots \Delta^n f(a)$$

$$+ \Delta \left[f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \ldots\ldots \Delta^n f(a) \right]$$

$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad f(a+\overline{n+1}\,h) = f(a) + \left[1 + \binom{n}{1}\right] \Delta f(a) + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots$$

$$= f(a) + \binom{n+1}{1} \Delta f(a) + \binom{n+1}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots + \Delta^{n+1} f(a)$$

ஆகவே இச் சூத்திரம் $x = (n+1)$ க்கும் மெய்யாகிறது.

இவ்வாறு நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம் x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகிறது என்று நிரூபிக்கிறோம்.

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் $a = 0, h = 1$ எனப் பிரதியிட்டால் கீழ்வரும் ஓர் எளிய அமைப்பைப் பெறுகிறோம்.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \Delta^x f(0)$$

இச் சூத்திரம் 'நியூட்டன்—கிரிகோரி'-ன் சூத்திரம் (Newton-Gregory Formula) என்றும் சொல்லப்படுகிறது. இச் சூத்திரம் நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பாகும்.

மாதிரி 1: இடைவெளி $h = 0{\cdot}2$ உள்ள 0·1 முதல் 0·9 வரையான நிகழ்வு எண்களுக்கு (p) உரிய x^2 கை-வர்க்க (chi-square) மதிப்புகளை 10 ($d.f.$)க்கு எழுதுக. இவற்றிலிருந்து $p = 0{\cdot}25$ க்கான கை-வர்க்க மதிப்பைக் காண்க. (ஏப்ரல் 1963)

கைவர்க்க நிகழ்வு எண் அட்டவணையில் $d.f.$ 10–க்கும் p யின் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளுக்கும் உரிய கை-வர்க்க மதிப்புகளை எழுதுகிறோம்.

p :	0·1	0·3	0·5	0·7	0·9
கை-வர்க்கம் :	15·987	11·781	9·342	7·267	4·865

இவற்றிற்குக் கீழ்வருமாறு தசமப்புள்ளியை ஒதுக்கி வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
0·1	15·987				
		−4206			
0·3	11·781		+1767		
		−2439		−1403	
0·5	9·342		+364		612
		−2075		−791	
0·7	7·267		−327		
		−2402			
0·9	4·865				

இங்கு நாம் காணவேண்டிய $f(0{\cdot}25)$-ன் மதிப்பு $f(0{\cdot}1)$, $f(0{\cdot}3)$ ஆகிய முதலிரு மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்டிருப்பதால் 0·1 ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்க. $a = 0{\cdot}1$ என அறிவோம்.

$$f(a) = 15987 = f(0{\cdot}1)$$
$$\triangle f(a) = -4206 = \triangle f(0{\cdot}1)$$
$$\triangle^2 f(a) = 1767 = \triangle^2 f(0{\cdot}1)$$
$$\triangle^3 f(a) = -1403 = \triangle^3 f(0{\cdot}1)$$
$$\triangle^4 f(a) = 612 = \triangle^4 f(0{\cdot}1)$$

$a+xh=X=0{\cdot}25$ அல்லது $x=\frac{X-a}{h}=\frac{0{\cdot}25-0{\cdot}10}{0{\cdot}2}=0{\cdot}75$

என்ற மதிப்புகளைக் கீழ் வரும் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட

$$f(a+xh)=f(a)+\binom{x}{1}\triangle f(a)+\binom{x}{2}\triangle^2 f(a)$$

$$+\binom{x}{3}\triangle^3 f(a)+\binom{x}{4}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots$$

$$f(0{\cdot}25)=15{\cdot}987++(0{\cdot}75)(-4{\cdot}206)$$

$$-\frac{(0{\cdot}75)(0{\cdot}25)}{2}1{\cdot}767$$

$$-\frac{(0{\cdot}75)(0{\cdot}25)(1{\cdot}25)}{6}1{\cdot}403$$

$$=15{\cdot}987$$

$$-3{\cdot}155$$

$$-0{\cdot}166$$

$$-0{\cdot}055$$

$$=12{\cdot}611$$

இதுதான் $P=0{\cdot}25$ க்குரிய கை–வர்க்கத்தின் மதிப்பாகும்.

மாதிரி 2: கீழ் வரும் அட்டவணையில் $f(x)$ என்ற சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது, ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(0{\cdot}2)$ ஐ மதிப்பிடுக.

(ஏப்ரல் 1968).

x:	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$:	176	185	194	203	212	220	229

$f(0{\cdot}2)$-ன் மதிப்பைக் காண நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். அதற்குக் கீழ்வரும் வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$	$\triangle^5 f(x)$	$\triangle^6 f(x)$
0	176						
		9					
1	185		0				
		9		0			
2	194		0		0		
		9		0		−1	
3	203		0		−1		5
		9		−1		4	
4	212		−1		3		
		8		2			
5	220		1				
		9					
6	229						

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\triangle f(0)+\binom{x}{2}\triangle^2 f(0)+\binom{x}{3}\triangle^3 f(0)+\ldots\ldots$$

$$f(0)=176$$

$$\triangle f(0)=9$$

$$\triangle^2 f(0)=\triangle^3 f(0)=\triangle^4 f(0)=0$$

$$\triangle^5 f(0)=-1$$

$$\triangle^6 f(0)=5$$

என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(0{\cdot}2)=176+(0{\cdot}2)\,9+0+0+0+\binom{0{\cdot}2}{5}(-1)+\binom{0{\cdot}2}{6}5$$

$$=176+1{\cdot}8-0{\cdot}025536-0{\cdot}102144$$

$$=177{\cdot}67232$$

மாதிரி 3: கீழ்வரும் d என்பது விட்டத்தையும் A என்பது அந்த வட்டத்தின் பரப்பளவையும் குறிக்கின்றன. 82 என்ற அளவுள்ள விட்டத்தையுடைய வட்டத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

d	A
80	5026
85	5674
90	6362
95	7088
100	7854

இங்கு $a=80$ ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்க. $h=5$. ஆகவே புதுமாறி x ஐ $x=\frac{d-80}{5}$ என எழுதலாம்.

$d = 82$ ஆனால்

$$x = \frac{82-80}{5} = 0 \cdot 4$$ என வருகிறது.

கீழ் வருமாறு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

d	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
80	0	5026				
			648			
85	1	5674		40		
			688		−2	
90	2	6362		38		4
			726		2	
95	3	7088		40		
			766			
100	4	7854				

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தை எழுத

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots$$

இதில் $x = 0{\cdot}4,\ f(0) = 5026$

$\Delta f(0) = 648$

$\Delta^2 f(0) = 40$

$\Delta^3 f(0) = -2$

$\Delta^4 f(0) = 4$

எனப் பிரதியிட

$$f(0{\cdot}4) = 5026 + (0{\cdot}4)\,648 + \frac{(0{\cdot}4)(-0{\cdot}6)}{2}\,40$$

$$+ \frac{0{\cdot}4\,(-0{\cdot}6)(-1{\cdot}6)}{6}(-2)$$

$$+ \frac{(0{\cdot}4)(-0{\cdot}6)(-1{\cdot}6)(-2{\cdot}6)}{24}\,4$$

$$= 5026 + 259{\cdot}2 - 4{\cdot}8000 - 0{\cdot}1280 - 0{\cdot}1664$$

$$= 5280{\cdot}1056$$

ஆகவே 82 என்ற அளவுள்ள விட்டத்திற்குரிய வட்டத்தின் பரப்பளவு 5280·1056 ஆகும்.

இடைச் செருகலில் கீழ்வரும் தற்கோள்களை (assumptions)ப் பயன்படுத்துகிறோம்.

1. $f(x)$ என்ற சார்பு, x-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

2. $f(x)$ என்ற சார்பிற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட படியுள்ள வகைக்கெழு உண்டு.

மேற் கூறிய இரண்டு தற்கோள்களிலும் முதலாவது விடைகளைத் துல்லியமாகக் கொடுக்கிறது.

x-ன் தொடர்ந்த மதிப்புகளுக்குரிய $f(x)$-ன் $(n+1)$ மதிப்புகள் இருந்தால் $f(x)$-ஐ ஒரு n-ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக அமைக்கலாம் என அறிவோம்.

$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots + A_nx^n$ எனக் கொள்க. இதன் அமைப்பைக் காணவேண்டுமானுல் $A_0, A_1 \ldots\ldots A_n$ என்ற $(n+1)$ மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக்காண வேண்டும்.

இதற்கு

$$f(a_0) = A_0 + A_1a_0 + \ldots\ldots + A_n a_0^n$$
$$f(a_1) = A_0 + A_1a_1 + \ldots\ldots + A_n a_1^n$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$f(a_n) = A_0 + A_1a_n + \ldots\ldots + A_n a_n^n$$

என்ற $(n+1)$ சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வேண்டும்.

இந்த முதலாவது தற்கோள் உண்மையானுல் நமக்குச் சரியான விடை கிடைக்கிறது. முதலாவது தற்கோள் உண்மையானுல் மீதி உறுப்புகள் பூச்சியமாகும். ஆகவே நமக்குச் சரியான விடை கிடைக்கிறது. n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் $(n+1)$ ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் மறையும் அல்லது பூச்சியமாகும். $R_{n+1}(x)$ என்ற மீதி உறுப்பின் $(n+1)$ ஆம் நிலை வேறுபாடு பூச்சியமாகிறது.

ஆகவே மேற் கூறிய தற்கோள்களில் ஏதாவதொன்று சரியாக இல்லாவிடில் எப்போதும் சரியான விடையை எதிர் பார்க்க முடியாது. சில சமயங்களில் துல்லியமான விடையை மிக எளிதில் பெறமுடியும். எடுத்துக் காட்டாக கீழ் வரும் அட்டவணையைக் கவனிக்க. இதில் $f(x) = 3x + 2$ என்ற ஒரு படிச்சார்பின் 4 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் இரண்டாம் தற்கோளால் $f(x)$–ஐ முப்படிச் சார்பு எனக் கொள்வது தவருகிறது. இருந்தாலும் மிகக் குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை $[f(0), \triangle f(0)]$ க் கொண்டே விடையை மிக எளிதில் பெறலாம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$
0	2		
		3	
1	5		0
		3	
2	8		0
		3	
3	11		

இம்முதல் தற்கோள் கீழ் வரும் சார்புகளைப் பொறுத்த வரை பயன்படுவதில்லை. ஏனெனில் அவை முடிவிலாத் தொடர்கள் (infinite series).

(1) $\log x$, (2) e^x, (3) e^{-x}.

இம் மூன்று சார்புகளையும் n–ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கூறமுடியாது. எனவே இச்சார்புகளைக் கொண்ட கணக்குகளில் மிகத் துல்லியமான விடையைப் பெற இயலாது.

ஆகவே மாறுத வேறுபாடுகளின் நிலையைக் கொண்டு $f(x)$ என்ற சார்பின் படியை (Degree) நிச்சயிக்க வேண்டும். பின்னர்தான் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்த வேண்டும். $f(x)$ என்ற சார்பு n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக இல்லாவிட்டால் $R_{n+1}(x)$ என்ற மீதி உறுப்பைக் கருதவேண்டும். இல்லாவிடில் சரியான விடை கிடைக்காது, ஏனெனில் விடையில் பிழை கலந்து விடுகிறது.

கீழ்வரும் தவருன முறைகளால் பிழையானது, இடைச் செருகல் சூத்திரத்தில் கிடைத்த விடைகளில், கலந்து விடுகிறது.

1. கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் உள்ள பின்ன எண்களை முழு எண்களாக மாற்றி விடுதல்.

2. வேறுபாட்டு அட்டவணையைத் தவருக அமைத்து விடுதல். அதாவது வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைத் தவருக எழுதிவிடுதல். ஒரு வேறுபாடு தவருனல் அதைத் தொடர்ந்த எல்லா வேறுபாடுகளும் தவருகக் கிடைக்கும்.

3. சூத்திரத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் தவருகக் கணக்கு போடுதல்.

4. சார்பின் உண்மையான அமைப்பையோ அல்லது அதன் உண்மையான படியையோ (degree) கருதாமல் விட்டு விடுதல் அல்லது அச்சார்பின் மீதி உறுப்பை (remainder term) க் கருதாமல் விட்டு விடுதல்.

இத்தவறுகளால் பிழைவராமல் தடுக்க,

(1) நாம் அட்டவணையில் அதிக இலக்கங்களைக் கொண்டிருக்கின்றன என்பதாலோ அல்லது பின்னமாக

உள்ளன என்பதாலோ எண்களை முழு எண்களாக மாற்றக் கூடாது.

(2) வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கும் போது மிகுந்த கவனம் செலுத்தி வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைச் சரியாகக் காணவேண்டும். வேறுபாடுகளுக்கு நேர் எதிர் குறிகளைக் (+ve or −ve signs) கவனித்துச் சரியாக இட வேண்டும்.

(3) சூத்திரத்தில் வரும் ஒவ்வொரு உறுப்பின் மதிப்பையும் தேவையான தசமஸ்தானங்களுக்கு மேல் ஒன்று அல்லது இரண்டு தசமஸ்தானங்கள் சரியாக உள்ளவாறு காணவேண்டும். ஆதியை, (origin) பொருத்தமான இடத்தில் கண்டு கணக்கை எளிதாக்கலாம்.

(4) மீதி உறுப்பின் துணைகொண்டோ அல்லது மாறுத வேறுபாடுகளின் நிலையைக் கொண்டோ கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் உண்மையான அமைப்பை அதன் படியுடன் (degree) காணவேண்டும்.

பயிற்சி 1

1. (*a*) செயலிகள் $\triangle$, E, ஆகியவற்றிற்கு வரையறை கூறுக.

(*b*) கீழ்க் கண்டவற்றிற்கு முதல் நிலை வேறுபாடுகள் காண்க.

(1) a^x, (2) bx^2, (3) $(x-1)^{-1}(x-2)^{-1}$

(4) $\dfrac{(8x+1)}{x^2+3x+2}$

2. $\triangle^3 [(1-x)(1-3x)(1-5x)]$-ன் மதிப்புக் காண்க. (ஏப்ரல் 1967)

3. (i) $E^m E^n \equiv E^{m+n}$ (ii) $\triangle [kf(x)] = k \triangle f(x)$ எனக் காட்டுக.

4. n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் $(n+1)$-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் பூச்சியம் ஆகும் என நிரூபிக்க.

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ என்ற சார்புக்கு $h = 0{\cdot}1$ என்ற இடைவெளியுடன் கூடிய $0 \leq x \leq 1$ என்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைத்து இத்தேற்றத்தை மெய்ப்பிக்க. (ஏப்ரல் 1963)

5. $f(x) = x^3 - 1{\cdot}7x^2 + 3{\cdot}2\,x + 2$ என்ற சார்புக்கு $h = 0{\cdot}01$ என்ற இடைவெளியுடன் கூடிய $0 \leq x \leq 0{\cdot}08$ என்ற x–ன் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைத்து $f(0{\cdot}08)$-ன் மதிப்பைச் சரிபார்க்க. (செப்டம்பர் '63)

6. $3x^3 - 2x^2 + 5x + 9$ என்ற முப்படிச் சார்புக்கு 4-ஆம் நிலை வேறுபாடுகள் எல்லாம் பூச்சியமா இல்லையா எனச் சரிபார்க்க.

7. $y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots\ldots$ எனக் காட்டுக.

8. (a) சம இடைவெளிகளுக்குரிய நியூட்டனின் சூத்திரத்தை நிரூபிக்க.

(b) ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(22)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	20	22	25	30	35
$f(x)$:	75	—	192	576	1190

9. சம இடைவெளியுள்ள மதிப்புகளுக்கு உரிய சார்பின் வேறுபாடுகள் என்றால் என்ன?

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

என்ற சார்பின் வேறுபாடுகள் காண்க.

10. Δ, E என்ற செயலிகள் மூன்று இயல் விதிகளைப் பின்பற்றுகின்றன என நிரூபிக்க. விதிவிலக்குகளைப் பற்றி விவாதிக்க.

11. $f(0) = -4$
$f(1) = -2$
$f(4) = 220$
$f(5) = 546$
$f(6) = 1148$
என்றால் $f(2)$, $f(3)$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

12. கீழ்வரும் அட்டவணையிலிருந்து 1931-ஆம் வருடத் திற்குரிய மக்கட் தொகையை மதிப்பிடுக.

வருடம்	மக்கட் தொகை (ஆயிரத்தில்)
1911	134
1921	139
1931	—
1941	239
1951	362

13. வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைத்து

(i) 4, 11, 14, 19 என்ற தொடரின் ஐந்தாம் உறுப்பையும்,

(ii) 0, 15, 54, 78, 129, 134 என்ற தொடரின் பத்தாம் உறுப்பையும் காண்க.

14. $e^x = \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x \cdot \frac{E(e^x)}{\Delta^2 e^x}$ என நிருபிக்க.

15. கீழ் வரும் அட்டவணையிலிருந்து

$$y = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots\ldots$$

என்ற சார்பைப் பெறுகிறோம்.

x	y
0·2	0·9900
0·3	0·9776
0·4	0·9604
0·5	0·9385
0·6	0·9120

நியூட்டனின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $J_0(0{\cdot}1)$-ன் மதிப்பைக் காண்க. இம்மதிப்பை மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $J_0(x)$-ல் கிடைத்த மதிப்போடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

(ஏப்ரல் 1967)

16. 'நியூட்டன்—கிரிகோரி' (Newton—Gregory) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வரும் அட்டவணையிலிருந்து $f(1{\cdot}5)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	858·3
1	869·6
2	880·9
3	892·3
4	903·6

17. $S_n(x)$ என்ற சார்புக்கு உரிய மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $S_n(0{\cdot}3)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$S_n(x)$
0·0	0·00000
0·1	0·09980
0·2	0·19841
0·4	0·38752
0·5	0·47595
0·6	0·55912

18. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து நியூட்டனின் இடைச் செருகல் முறையைப் பயன்படுத்தி வயது 22-க்கு உரிய வாழ்நாளின் எதிர்பார்ப்பை (expectation of life) க் காண்க. இச் சூத்திரத்தில் பயன்பட்ட தற்கோளை (assumption) க் கூறுக.

வயது	வாழ்நாளின் எதிர்பார்ப்பு (வருடங்களில்)
10	35·4
15	32·2
20	29·1
25	29·0
30	23·1
35	20·4

(I.A.S. 1949)

19. கீழ் வரும் அட்டவணையில் x^2-ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $n = 11$-க்கு உரிய x^2-ன் மதிப்பைக் காண்க.

n	x^2
1	3·84
6	12·59
11	—
16	26·30
21	32·67

20. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைக் கொண்டு $f(4)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	1	2	3	4	5
$f(x)$:	2	5	7	—	32

(செப்டம்பர் 1964)

21. சம இடைவெளிக்கான நியூட்டனின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை வருவிக்க. இதில் பயன்பட்ட தற்கோள்களை (assumptions) க் கூறுக.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து 25 வயதுக்குரிய வருடப் பிரிமியத்தை (Annual net premium) க் காண்க.

வயது	வருட மொத்தப் பிரிமியம்
20	0·01427
24	0·01581
28	0·01772
32	0·01996

(I.A.S. 1950)

22. $\Delta^n \sin(ax+b)$-ன் அமைப்பைக் காண்க. இங்கு $h=1$ எனக் கொள்க.

$\sin \pi x \neq 0$ என்றால், இம்முறையிலோ அல்லது வேறு முறையிலோ

$$\sin^n(\pi x)\,\frac{\Delta^n \sin \pi x}{E^n \sin \pi x} = \left(\frac{\Delta}{E} \sin \pi x\right)^n$$

என நிரூபிக்க.

23. (1) e^{ax} (2) a^{x+b} ஆகியவற்றின் n-வது நிலை வேறுபாடுகளைக் காண்க.

2. அசம இடைவெளிக்கு இடைச் செருகல்

(Interpolation With Unequal Intervals)

சென்ற பகுதியில் மாறியின் சம இடைவெளிக்கான இடைச் செருகல் கணக்குகளைக் கருதினோம். ஆனால் எப்போதும் இதுபோல சம இடைவெளியுடைய மாறியின் கணக்குகள் கிடைப்பது அரிது. இங்கு அசம இடைவெளிகளுக்கான கணக்குகளைக் கருதுவோம்.

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ என்பனவற்றை அசம இடைவெளியுள்ள மாறியாகிய x-ன் மதிப்புகளெனக் கொள்க. இங்கு $a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1, \ldots\ldots$ என்றுகின்றன.

இப் பகுதியில்

(1) நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரம் (Newton's Divided Difference Formula)

(2) 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரம் (Lagrange's Formula) என்ற இரு சூத்திரங்களை அசம இடைவெளிகளுள்ள மாறியின் கணக்குகளுக்குப் பயன்படுத்துகிறோம். 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைச் சம இடைவெளிகளுக்கும் அசம இடைவெளிகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை :—(Divided Difference Table).

இடைவெளிகள் $(a_1 - a_0)$, $(a_2 - a_1)$ ...... என்பவை சம மற்று இருக்க, a_0, a_1, a_2, ... என்பவற்றை x என்ற மாறியின் மதிப்புகளெனக் கொள்க. $f(a_0)$. $f(a_1)$, $f(a_2)$ ...... என்பவற்றை x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய $f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்புகள் எனக்கொள்க.

இங்கும் இரண்டு அடுத்தடுத்த சார்பு மதிப்புகளுக்கு வேறுபாடுகள் காண்கிறோம். ஆனல் அவற்றை அவற்றின் அசம இடை வெளிகளால் வகுக்கிறோம். இவ்வாருகக் கண்ட வேறுபாடுகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாடுகள் (Divided Difference) எனப் பெயர். இவ்வேறுபாடுகளின் அட்டவணைக்கு வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை (Divided Difference Table) எனப் பெயர்.

வகுபட்ட வேறுபாடுகளுக்கு $\triangle$ என்ற ஒரு புது செயலியைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஆகவே வரையறைப்படி

$$\underset{a_1}{\triangle} f(a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}$$

$$\underset{a_2}{\triangle} f(a_1) = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}$$

... ...

என்று எழுதுகிறோம்.

இதுபோலவே இரண்டாம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகளை

$$\underset{a_1 a_2}{\triangle^2} f(a_0) = \underset{a_2}{\triangle} [\underset{a_1}{\triangle} f(a_0)]$$

$$= \underset{a_2}{\triangle} \left[\frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}\right]$$

$$= \frac{\underset{a_1}{\triangle} f(a_2) - \underset{a_1}{\triangle} f(a_0)}{a_2 - a_0}$$

என்று எழுதுகிறோம்.

இவைகளையெல்லாம் சேர்த்து எழுத வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை கீழ்வருமாறு கிடைக்கிறது.

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
a_0	$f(a_0)$			
		$\underset{a_1}{\Delta} f(a_0)$		
			$\underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0)$	
a_1	$f(a_1)$			
		$\underset{a_2}{\Delta} f(a_1)$		$\underset{a_1 a_2 a_3}{\Delta^3} f(a_0)$
a_2	$f(a_2)$			
			$\underset{a_2 a_3}{\Delta^2} f(a_1)$	
		$\underset{a_3}{\Delta} f(a_2)$		
a_3	$f(a_3)$			

இம்மாதிரி வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கும் முறையைக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டு விளக்குகிறது.

மாதிரி 1: கீழே கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$-ன் மதிப்புகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்க.

x	$f(x)$
11	15
17	84
21	194
23	280

வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
11	15			
		$\frac{84-15}{17-11} = 11{\cdot}5$		
17	84		$1{\cdot}600$	
		$\frac{194-84}{21-17} = 27{\cdot}5$		$0{\cdot}082$
21	194		$2{\cdot}583$	
		$\frac{280-194}{23-21} = 43{\cdot}0$		
23	280			

இதில் $1{\cdot}600 = \dfrac{27{\cdot}5 - 11{\cdot}5}{21 - 11}$

$$2{\cdot}583 = \frac{43 - 27{\cdot}5}{23 - 17}$$

$$0{\cdot}082 = \frac{2{\cdot}583 - 1{\cdot}600}{23 - 11}$$

வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் தன்மைகள் :

1. வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் சமச்சீர் தன்மை :— (Symmetry property of divided differences.)

வரையறையின்படி,

$$\underset{a_1}{\triangle} f(a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}$$

$$= \frac{f(a_0) - f(a_1)}{a_0 - a_1}$$

என்றும் எழுதலாம்.

ஆனல் $\dfrac{f(a_0 - f(a_1)}{a_0 - a_1} = \underset{a_0}{\triangle} f(a_1)$

ஆகையால் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\underset{a_1}{\triangle} f(a_0) = \underset{a_0}{\triangle} f(a_1)$$

இதிலிருந்து மாறியின் மதிப்புகளின் கீழ்க் குறிகளை (suffices) ஒன்றிலிருந்து மற்றதற்கு மாற்றுவதனல் வகுபட்ட வேறுபாடுகளின் மதிப்புகள் மாறுவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது. இதையே வேறு விதமாகக் கூறினல், வகுபட்ட வேறுபாடு சமச்சீர் தன்மை கொண்டது என்போம்;

எந்த ஒரு நிலையுள்ள வகுபட்ட வேறுபாடானலும் இத் தன்மை உண்மையாகிறது. மாதிரியாக இரண்டாம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாட்டைக் கருதுக.

$$\underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) = \underset{a_2}{\Delta} [\underset{a_1}{\Delta} f(a_0)]$$
$$= \underset{a_2}{\Delta} [\underset{a_0}{\Delta} f(a_1)]$$
$$= \underset{a_0 a_2}{\Delta^2} f(a_1)$$

$$(\because \underset{a_1}{\Delta} f(a_0) = \underset{a_0}{\Delta} f(a_1))$$

2. n – ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையின் n – ஆம் நிலை வகுபட்ட வேறுபாடுகள் மாறிலியாகும்.

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரம். (Newtons' Divided Difference Formula).

x, $f(x)$ என்பன முறையே மாறி எனவும் சார்பு எனவும் கொள்க.

$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ என்பன மாறியின் மதிப்புகள் எனவும் $f(a_0), f(a_1), f(a_2) \ldots\ldots f(a_n)$ என்பன அவற்றிற்குரிய சார்பின் மதிப்புகளெனவும் கொள்க.

வரையறையின்படி

$$\underset{x}{\Delta} f(a_0) = \frac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0}$$

அல்லது

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) \underset{x}{\Delta} f(a_0)$$

இது போலவே

$$\underset{x}{\Delta} f(a_0) = \underset{a_1}{\Delta} f(a_0) + (x - a_1) \underset{a_1 x}{\Delta^2} f(a_0)$$
$$\underset{a_1 x}{\Delta^2} f(a_0) = \underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) + (x - a_2) \underset{a_1 a_2 x}{\Delta^3} f(a_0)$$

... ...
... ...
... ...

$$\underset{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x}{\Delta^n} f(a_0) = \underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\Delta^n} f(a_0) + (x - a_n) \underset{a_1 a_2 \ldots a_n x}{\Delta^{n+1}} f(a_0)$$

$\underset{x}{\Delta} f(a_0)$, $\underset{a_1 x}{\Delta^2}$ $a_0)$, ... ஆகியவற்றின் மேற்கண்ட

மதிப்புகளை அடுத்தடுத்து பிரதியிட $f(x)$ – க்குரிய முதல் சமன்பாடு

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\underset{a_1}{\Delta} f(a_0)+(x-a_0)(x-a_1)\underset{a_1a_2}{\Delta^2} f(a_0)$$

$$+\dots+(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})\underset{a_1a_2\dots a_n}{\Delta^n} f(a_0)$$

$$+(x-a_0)(x-a_1)\dots\dots(x-a_n)\underset{a_1a_2\dots a_nx}{\Delta^{n+1}} a_1a_2 f(a_0)$$

என்றுகிறது.

இதில் கடைசி உறுப்பு

$$R_{n+1}(x)=(x-a_0)(x-a_1)\dots\dots(x-a_n)\underset{a_1a_2\dots a_n x}{\Delta^{n+1}} f(a_0)$$

மீதி உறுப்பு (Remainder Term) எனப்படும்.

இதில் x ன் மதிப்பு $a_0\ a_1 \dots\dots a_n$ என்பவற்றில் ஏதாவ தொன்றுனல் இம்மீதி உறுப்பு மறைகிறது. இதையே வேறு விதமாகக் கூறினல் $R_{n+1}(x)$ என்ற மீதி உறுப்பு மறைந்தால் $f(x)$ என்பது ஒரு n – ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். ஆகவே $f(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையானல்

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\underset{a_1}{\Delta} f(a_0)+(x-a_0)(x-a_1)\underset{a_1a_2}{\Delta^2} f(a_0)$$

$$+\dots\dots+(x-a_0)(x-a_1)\dots\dots(x-a_{n-1})\underset{a_1a_2\dots a_n}{\Delta^n} f(a_0)$$

இதுதான் நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரம்.

மாதிரி 1.

y என்ற சார்பு கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து பெறப் படுகிறது. $x=2$ என்றுல் y – ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y
0	276
3	460
5	414
6	343
8	110

x – க்கு அசம இடைவெளிகள் இருப்பதால் கீழ்வரும் வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	276				
		61·33			
3	460		– 16·867		
		– 23·00		0·1445	
5	414		– 16·000		0·0028
		– 71·00		0·1667	
6	343		– 15·167		
		– 116·50			
8	110				

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) \underset{a_1}{\Delta} f(a_0) + (x - a_0)(x - a_1) \underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0)$$

$$+ (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) \underset{a_1 a_2 a_3}{\Delta^3} f(a_0) + \ldots\ldots$$

இதில் $x = 2,$

$a_0 = 0$

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = 6$

$a_4 = 8$ எனக் கொள்க.

இம்மதிப்புகளை மேற்கூறிய சூத்திரத்தில் பிரதியிட

$$f(2) = 276 + 2\,(61 \cdot 33) + 2\,(-1)\,(-16 \cdot 867)$$

$$+ 2\,(-1)\,(-3)\,(0 \cdot 1445) + 2\,(-1)\,(-3)\,(-4)\,(0 \cdot 0028) + 0$$

$$= 433 \cdot 189$$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $x = 2$ என்றால் $y = 433 \cdot 189$ என்று காண்கிறோம்.

மாதிரி 2.

கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்க. அந்த அட்டவணையை விரிவுபடுத்தி $f(3)$, $f(14)$ ஆகிய சார்பு மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
4	48
5	100
7	294
10	900
11	1210
13	2028

(ஏப்ரல் 1959)

கீழ்வருமாறு வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
4	48			
		52		
5	100		15	
		97		1
7	294		21	
		202		1
10	900		27	
		310		1
11	1210		33	
		409		1
13	2028		37	
		520		
14	2548			

முதற்கண் 4 லிருந்து 13 வரை உள்ள x – ன் மதிப்புகளுக்குரிய 48, 100, ... 2028 என்ற $f(x)$ – ன் மதிப்புகளுக்கு வகுபட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

மாதிரியாகச் சிலவற்றைக் கருதுவோம்.

$$\Delta f(4) = \frac{100 - 48}{5 - 1} = 52$$

$$\triangle f(7) = \frac{900 - 264}{10 - 7} = 202$$

$$\triangle^2 f(4) = \frac{97-52}{7-4} = \frac{45}{3} = 15$$

$$\triangle^2 f(7) = \frac{310-202}{11-7} = \frac{108}{4} = 27$$

... ...
... ...
... ...

$$\triangle^3 f(4) = \frac{21-15}{10-4} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\triangle^3 f(7) = \frac{33-27}{13-7} = \frac{6}{6} = 1$$

இவ்வாறு வகுபட்ட வேறுபாடுகள் கண்டபின் எல்லா 3-ஆம் நிலே வேறுபாடுகள் 1 எனக் காண்கிறேம்.

$$\therefore \quad \triangle^3 f(10) = 1$$

$$\triangle^3 f\ (3) = 1$$

என எழுதிப் பின்னேக்கிச் சென்று f (3), f (14) ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களேக் காண்கிறேம்.

$\triangle^2 f$ (3) ஐக் காண

$\triangle^3 f(3) = 1, \quad \triangle^2 f(4) = 15$

ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துகிறேம்.

$$\therefore \quad \triangle^3 f(3) = \frac{15 - \triangle^2 f(3)}{7-3}$$

அதாவது $\triangle^2 f(3) = 15 - 4\ \triangle^3 f(3)$

$= 15 - 4 \times 1$

$= 11.$

இதே முறையில்

$\triangle f\ (3) = 52 - (5-3)\ 11$

$= 30$

$f(3) = 48 - (4-3)\ 30$

$= 18$ என்று கிடைக்கிறது.

இதுபோலவே $f(14) = 2548$ என்று கண்டுபிடிக்கிறேம்.

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் இடைச் செருகல் சூத்திரம்.

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பவற்றை x-ன் மதிப்புகள் எனவும் $f(a_0), f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots f(a_n)$ என்பவற்றை $f(x)$-ன் $(n+1)$ மதிப்புகள் எனவும் கொள்க. $f(x)$ என்பது n-ஆம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையாகிறது. $f(x)$ ஐக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = A_0 (x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$$
$$+A_1 (x-a_0)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$$
$$+A_2 (x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)$$
$$+A_n (x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})$$

இதிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $(n-1)$ வகையீட்டு பல்லுறுப்புக் கோவையாகிறது.

இங்கு A_0, A_1, A_n என்ற மாறிலிகளைக் காண வேண்டும்.

$x = a_0$ எனப் பிரதியிட

$$f(a_0) = A_0 (a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)$$

$$\therefore \quad A_0 = \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)}$$

இதுபோலவே $x = a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்று பிரதியிட

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots\ldots(a_1-a_n)}$$

$$A_n = \frac{f(a_n)}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

இவ்வாறு

$$f(x) = f(a_0)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)}$$
$$+ f(a_1)\frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots\ldots(a_1-a_n)}$$
$$+ \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots$$
$$+ f(a_n)\frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

இதுதான் 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரம்.

இச்சூத்திரத்தைக் கீழ்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)} = \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots\ldots(a_0-a_n)} \times \frac{1}{(x-a_0)}$$

$$+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots\ldots(a_1-a_n)}\frac{1}{(x-a_1)}$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad + \quad \ldots \quad \ldots$$

$$+\frac{f(a_n)}{(a_n-a_0)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}\frac{1}{(x-a_n)}$$

இது 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தின் இரண்டாவது அமைப்பு ஆகும்.

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தின் முதல் அமைப்பைக் கீழ் வருமாறு சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\phi(x)}{\phi'(a_r)}\frac{f(a_r)}{(x-a_r)}$$

இங்கு $\phi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_n)$

$$\log\ \phi(x) = \log(x-a_0) + \log(x-a_1) + \ldots\ldots + \log(x-a_n)$$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{(x-a_0)} + \frac{1}{(x-a_1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x-a_n)}$$

$$\therefore \quad \phi'(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$$

$$+ (x-a_0)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)$$

$$+ \quad \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots$$

$$+ (x-a_0)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})$$

x-ன் சம, அசம இடைவெளிகளுக்குரிய கணக்குகளைப் போட 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இருப்பினும் இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சம இடைவெளி களுக்குரிய கணக்குகளைப் போடுவது மிகவும் கடினம். ஆகை யால் சம இடைவெளிகளுக்குரிய கணக்குகளைப்போட நியூட்டனின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் நலம்.

மாதிரி : 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி F (0) ன் மதிப்பைக் காண்க.

z :	-30	-13	3	18
$f(z)$:	30	34	38	42

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(a_0)\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$

$$+ f(a_1)\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+ f(a_2)\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \ldots\ldots$$

இங்கு $x = 0$

$a_0 = -30$

$a_1 = -13$

$a_2 = 3$

$a_3 = 18$ எனக் கொள்க.

இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(0) = 30\frac{13(-3)(-18)}{(-17)(-33)(-48)} + 34\frac{30(-3)(-18)}{17(-16)(-31)}$$

$$+ 38\frac{30(13)(-18)}{33(16)(-15)} + 42\frac{30(13)(-3)}{48(31)15}$$

$$= -0{\cdot}78 + 6{\cdot}53 + 38{\cdot}68 - 2{\cdot}20$$

$$= 37{\cdot}23$$

$\therefore$ F (0) $= 37{\cdot}23$

மாதிரி : 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$-ன் அமைப்பைக் காண்க.

x :	0	2	3	6
$f(x)$:	659	705	729	804

(செப்டம்பர் 1963)

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(a_0)\frac{(x-a_1)\ (x-a_2)\ (x-a_3)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$

$$+ f(a_1)\frac{(x-a_0)\ (x-a_2)\ (x-a_3)}{(a_1-a_0)\ (a_1-a_2)\ (a_1-a_3)}$$

$$+ f(a_2)\frac{(x-a_0)\ (x-a_1)\ (x-a_3)}{(a_2-a_0)\ (a_2-a_1)\ (a_2-a_3)}$$

$$+ f(a_3)\frac{(x-a_0)\ (x-a_1)\ (x-a_2)}{(a_3-a_0)\ (a_3-a_1)\ (a_3-a_2)}$$

இதில் கீழ்வரும் மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$a_0 = 0 \qquad f(a_0) = 659$$

$$a_1 = 2 \qquad f(a_1) = 705$$

$$a_2 = 3 \qquad f(a_2) = 729$$

$$a_3 = 6 \qquad f(a_3) = 804$$

$$f(x) = 659\frac{(x-2)(x-3)(x-6)}{(-2)(-3)(-6)}$$

$$+ 705\frac{(x-0)(x-3)(x-6)}{2\ (-1)\ (-4)}$$

$$+ 729\frac{(x-0)(x-2)\ (x-6)}{3 . 1 . (-3)}$$

$$+ 804\frac{(x-0)\ (x-2)\ (x-3)}{6 . 4 . 3}$$

$$f(x) = -18{\cdot}3\ (x-2)\ (x-3)\ (x-6)$$

$$+ 88{\cdot}1\ x\ (x-3)\ (x-6)$$

$$- 81x\ (x-2)\ (x-6)$$

$$+ 11{\cdot}1\ x\ (x-2)\ (x-3)$$

$$= -0{\cdot}1x^3 + 0{\cdot}9x^2 + 21{\cdot}6x + 658{\cdot}9$$

இதுதான் காணவேண்டிய சார்பாகும்.

இம்மாதிரி கணக்குகளில் $f(x)$ ன் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மதிப்புகள் காண வேண்டியிருந்தால் முதலில் $f(x)$-ன் இம் மாதிரியான பொதுவான அமைப்பை (சார்பை)க் கண்டு பின்னர் அச்சார்பில் x-ன் மதிப்புகளைப் பிரதியிட

வேண்டிய $f(x)$-ன் மதிப்புகள் கிடைக்கும். இம்முறையால் நேரத்தை மிச்சப் படுத்தலாம். இரண்டு மூன்று கணக்கு களாகப் போடவேண்டியதில்லை. ஒரே சார்பிலிருந்து அம் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

மாதிரி : மேற்கண்ட கணக்கில் $f(1)$, $f(5)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$f(1)$, $f(5)$ ஆகியவற்றைக் காண நாம் 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தை இரு முறை பயன்படுத்தி இரண்டு கணக்குகள் போட வேண்டியதில்லை. $f(x)$-ன் அமைப்பைக் கண்டு அதில் $x = 1$, $x = 5$ என்று பிரதியிட்டால் போதும். இங்கு

$$f(x) = -0{\cdot}1x^3 + 0{\cdot}9x^2 + 21{\cdot}6x + 658{\cdot}9$$

எனக் கண்டோம்.

$$\therefore \quad f(1) = 681{\cdot}3$$

$$f(5) = 776{\cdot}9$$

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரம் (மீதி உறுப்புடன்) (Lagrange's formula with Remainder Term).

a_0, a_1, a_2, a_3 என்பன x–ன் மதிப்புகள் எனவும் $f(a_0)$, $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$ என்பன $f(x)$-ன் மதிப்புகள் எனவும் கொள்க. உதாரணமாக $f(x)$-க்கு 3-ஆம் நிலை வகையீட்டுக் குணகங்கள் (third order derivatives) உண்டு எனக்கொள்க. $F(x)$ என்ற மற்றொரு சார்பைக் கீழ் வருமாறு அணிக்கோவை (Determinant) அமைப்பில் எழுதுவோம்.

$$F(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & f(x) \\ 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 & f(a_0) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & f(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & f(a_2) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & f(a_3) \end{vmatrix}$$

a_0, a_1, a_2, a_3 என்ற x-ன் நான்கு மதிப்புகளுக்கும் $F(x) = 0$. ஆகையால் a_0, a_1, a_2 a_3 இவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஏதாவ தொரு மதிப்பிற்கு $F'''(x) = 0$.

மேற்கண்ட $F(x)$-ன் மூன்றும் நிலை வகையீட்டுக் குணகம் காண வலது பக்கத்தில் முதல் படுக்கை வரிசையை (first row) வகைப்படுத்த (differentiate) வேண்டும்.

ஆகவே

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3! & f'''(x) \\ 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 & f(a_0) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & f(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & f(a_2) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & f(a_3) \end{vmatrix},$$

$$0 = -3 \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & f(a_0) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & f(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & f(a_2) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & f(a_3) \end{vmatrix}.$$

$$+ f'''(x) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= 3!\, f(a_0) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} - 3!\, f(a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$+ 3!\, f(a_2) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} - 3!\, f(a_3) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

$$+ f'''(x) \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

இரண்டு உயர வரிசைகளோ அல்லது படுக்கை வரிசைகளோ (columns or rows) சமமாக இருந்தால் இம்மாதிரியான மேற்கண்ட அமைப்புகள் (determinants) மறைகின்றன என அறிவோம். ஆகவே $a_0 = a_0$, $a_0 = a_2$ ...... எனப் பிரதியிட்டு மேற்கண்ட அமைப்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்கிறோம்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad 0 = & - 3!\, f(a_0)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \\ & + 3!\, f(a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)(a_2 - a_3) \\ & - 3!\, f(a_2)(a_0 - a_1)(a_0 - a_3)(a_1 - a_3) \\ & + 3!\, f(a_3)(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_1 - a_2) \\ & + f'''(x)(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)\,. \\ & \qquad (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \end{aligned}$$

இதையே $f(a_0)$-க்கு எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} f(a_0) = & f(a_1)\frac{(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \\ & + f(a_2)\frac{(a_0 - a_1)(a_0 - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \\ & + f(a_3)\frac{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} \\ & + f'''(x)\frac{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)}{3!} \end{aligned}$$

இதில் $x = a_0$ எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned} \therefore \quad f(x) = & f(a_1)\frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \\ & + f(a_2)\frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \\ & + f(a_3)\frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} \\ & + f'''(x)\frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{3!} \end{aligned}$$

என்ற முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகிறது. இது தான் 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் பொது சூத்திரம், இதில்

$$f'''(x)\frac{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)}{3!}$$

என்பது மீதி உறுப்பாகும் (Remainder Term).

இதுபோலவே $a_0, a_1, a_2 ...... a_n$ என்ற x-ன் மதிப்புகளுக்கு உரிய $f(x)$-ன் மதிப்புகள் $f(a_0), f(a_1), f(a_2) ......$ என்றால் இச் சூத்திரத்தை மீதி உறுப்புடன் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = f(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ ......\ (x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ ......\ (a_1-a_n)}$$

$$+ f(a_2)\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ ......\ (x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ ......\ (x-a_n)}$$

$$+ \quad ... \quad ... \quad + \quad ... \quad ...$$

$$+ f(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ ......\ (x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ ......\ (a_n-a_{n-1})}$$

$$+ f^{(n)}(x)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ ......\ (x-a_n)}{n!}$$

இங்கு $f^{(n)}(x)\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\ ......\ (x-a_n)}{n!}$

என்பது மீதி உறுப்பாகும். இதில் n-ன் மதிப்பு அதிகமானால் மீதி உறுப்பு மெதுவாக மறைகிறது.

சம இடைவெளிகளுக்கும் 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதற்குக் கீழ் வரும் கணக்கு ஓர் உதாரணமாகும்.

மாதிரி: கீழ் வரும் அட்டவணையிலிருந்து $f(48)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
40	15·22
45	13·99
50	12·62
55	11·13

இங்கு x சம இடைவெளியுடையதாக உள்ளது. 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைச் சம இடைவெளிக்கும் பயன்படுத்தலாம் என அறிவோம்.

'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$\frac{f(x)}{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)}$$

$$+ \frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$+ \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

இதில் $x = 48$

$a_0 = 40$

$a_1 = 45$

$a_2 = 50$

$a_3 = 55$ எனக் கொள்க.

இவற்றை மேற்கூறிய சூத்திரத்தில் பிரதியிட

$$\frac{f(48)}{8(3)(-2)(-7)} = \frac{-15 \, . \, 22}{5(10)(15)8} + \frac{13 \, . \, 99}{5(5)(10)3}$$

$$+ \frac{12 \, . \, 62}{(10)(5)(5)(2)} + \frac{11 \, . \, 13}{15(10)(5)7}$$

$$= \frac{-15 \, . \, 22}{6000} + \frac{13 \, . \, 99}{750} + \frac{12 \, . \, 62}{500} + \frac{11 \, . \, 13}{5250}$$

$$= 0{\cdot}03924$$

$$\therefore \quad f(48) = (0{\cdot}03924)\, 336$$

$$= 13{\cdot}18464$$

'நியூட்டன்-கிரிகோரி'-ன் பொதுச் சூத்திரம் (மீதி உறுப்புடன்) (Newton-Gregory formula with Remainder Term)

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து அசம இடைவெளியைச் சம இடைவெளியாக மாற்றிய பின் 'கிரிகோரி' என்பவர் ஒரு சூத்திரத்தை வருவித்தார். இதையே நாம் நியூட்டன்-கிரிகோரி சூத்திரம் என்றும் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம் (Newton's Advancing difference formula or Newton's Forward difference formula) என்றும் கூறுகிறோம்.

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) \underset{a_1}{\Delta} f(a_0) + (x - a_0)(x - a_1) \underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) + \ldots\ldots$$
$$+ (x - a_0)(x - a_1) \ldots\ldots (x - a_{n-1}) \underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\Delta^n} f(a_0)$$
$$+ R_n(x)$$

இங்கு $R_n(x)$ என்பது மீதி உறுப்பு.

இதில் $a_0 = a$ (ஆரம்பம்)

$a_1 = a + h$

$a_2 = a + 2h$

... ...

... ...

$a_n = a + nh$

எனச் சம இடைவெளி x-க்கு இருக்குமாறு கொள்க.

சார்பு மதிப்புகளுக்குக் கீழ் வருமாறு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
a	$f(a)$			
		$\Delta f(a)$		
$a+h$	$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$	
		$\Delta f(a+h)$		$\Delta^3 f(a)$
$a+2h$	$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$	
		$\Delta f(a+2h)$		
$a+3h$	$f(a+3h)$			

வகுபட்ட வேறுபாடுகளைச் சாதாரண வேறுபாடுகளாகக் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\underset{a_1}{\Delta} f(a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{h}$$

$$= \frac{\Delta f(a)}{h}$$

இதுபோலவே

$$\underset{a_1 a_2}{\triangle^2} f(a_0) = \frac{\underset{a_2}{\triangle} f(a_1) - \underset{a_1}{\triangle} f(a_0)}{2h}$$

$$= \frac{\frac{\triangle f(a+h)}{h} - \frac{\triangle f(a)}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\triangle f(a+h) - \triangle f(a)}{2!\ h^2}$$

$$= \frac{\triangle^2 f(a)}{2!\ h^2}$$

இவ்வாறு

$$\underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\triangle^n} f(a_0) = \frac{\triangle^n f(a)}{n!\ h^n}$$

என்று பொதுவான அமைப்பை எழுதலாம்.

ஆகவே நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் வகுபட்ட வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாகச் சாதாரண வேறுபாடுகளைப் பிரதியிடக் கீழ்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{h} \triangle f(a)$$

$$+ \frac{(x-a)\ (x-a-h)}{h^2} \ \frac{\triangle^2 f(a)}{2!}$$

$$+ \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{(x-a)\ (x-a-h) \ldots\ldots (x-a-\overline{n-1}\,h)}{h^n} \ \frac{\triangle^n f(a)}{n!}$$

$$+ R_n(x)$$

இதைத்தான் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரம் (Newton's Forward Formula) என்கிறோம். ஏனெனில் இதில் சம இடைவெளிக்கான முன்னணி வேறுபாடுகள் (Forward or leading differences) உள்ளன.

$X = \frac{x-a}{h}$ எனக் கொள்க.

ஆகவே

$$f(a+xh) = f(a) + \binom{X}{1} \triangle f(a) + \binom{X}{2} \triangle^2 f(a) + \ldots\ldots$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad + \quad \ldots$$

$$+ \binom{X}{n} \triangle^n f(a) + R_n(X)$$

இதில் $a = 0$, $h = 1$ என்ருல் இதுவே கீழ்வரும் ஓர் எளிய சூத்திரமாகும்.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \triangle f(0) + \binom{x}{2} \triangle^2 f(0) + \ldots\ldots$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad + \quad \ldots$$

$$+ \binom{x}{n} \triangle^n f(0) + R_n(x)$$

இதில் $R_n(x)$ என்பது மீதி உறுப்பாகும், (Remainder Term).

நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரம் (Newton's Backward Formula).

x என்ற மாறியின் சம இடைவெளியுள்ள தொடர்ந்த மதிப்புகளுக்கு உரிய $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் நாம் இடைச் செருகவேண்டிய மதிப்பு அட்டவணையின் ஆரம்பத்திலேயே இருக்குமாஞல் நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தை (Newton's Forward Formula) ப் பயன்படுத்துகிரேம். இம் முற்போக்குச் சூத்திரத்தில் $\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(0)$, ... என்ற முன்னணி வேறுபாடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இந்த முன்னணி வேறுபாடுகள் நாம் இடைசெருக வேண்டிய $f(x)$ -ன் மதிப்பிற்கு வெகு அருகாமையில் இருப்பதால்தான் இந்த நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிரேம். இதனல் குறைந்த உறுப்புக்களைக் கருதியபோதிலும் துல்லியமான விடையை இச்சூத்திரத்தால் பெறுகிரேம். ஆனல் நாம் இடைச் செருகவேண்டிய $f(x)$ -ன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையின் இறுதியில் இருந்தால் இம்மதிப்பிற்கு வெகு தொலைவில் உள்ள $\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(0)$, ... என்ற முன்னணி வேறுபாடுகளைக்

கொண்ட நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தால் துல்லியமான விடையைப் பெறமுடியாது.

ஆகையால் இம்மாதிரி இடைச் செருகலுக்கு, இடைச் செருகவேண்டிய $f(x)$ -ன் மதிப்பிற்கு வெகு அருகிலுள்ள வேறுபாடுகளைக் கருதுதல் நல்லது. இந்த வேறுபாடுகளைப் பின்னணி வேறுபாடுகள் (Backward differences) என்கிறோம். கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் குறித்த கோட்டின் மேல் காணும் வேறுபாடுகள், பின்னணி வேறுபாடுகள் ஆகும்.

பின்னணி வேறுபாடுகளுக்கான அட்டவணை

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
$a-3h$	$f(a-3h)$			
		$\triangle f(a-3h)$		
$a-2h$	$f(a-2h)$		$\triangle^2 f(a-3h)$	
		$\triangle f(a-2h)$		$\triangle^3 f(a-3h)$
$a-h$	$f(a-h)$		$\triangle^2 f(a-2h)$	
		$\triangle f(a-h)$		
a	$f(a)$	—		

இவ்வட்டவணையில்

$$\triangle f(a-h), \quad \triangle^2 f(a-2h), \quad \triangle^3 f(a-3h)$$

என்பன பின்னணி வேறுபாடுகள் ஆகும். பின்னணி வேறுபாடுகளைக் கருதவேண்டிய கணக்கிற்குக் கீழேவருவது ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

கீழ்வரும் மதிப்புகளைக் கொண்டு $x = 27{\cdot}5$ க்கு உரிய y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y
25	16·195
26	15·919
27	15·630
28	15·326

கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
25	16·195			
		– 0·276		
26	15·919		– 0·013	
		– 0·289		– 0·002
27	15·630		– 0·015	
		– 0·304		
28	15·326	—		

இதில் – 0·304, – 0·015, – 0·002 என்பன பின்னணி வேறுபாடுகள் ஆகும்.

நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தின் வருவிப்பு (Derivation of Newton's Backward Formula)

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தை வருவிப்போம்.

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) \underset{a_1}{\triangle} f(a_0) + (x - a_0)(x - a_1) \underset{a_1 a_2}{\triangle^2} f(a_0) + \ldots\ldots + (x - a_0)(x - a_1) \ldots\ldots (x - a_{n-1}) \underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\triangle^n} f(a_0) + R_n(x)$$

வகுபட்ட வேறுபாடுகளைச் சம இடைவெளிக்குரிய சாதாரண வேறுபாடுகளாக மாற்றி நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தை வருவிக்கிறோம்.

ஆகவே

$a_0 = a$ ஆரம்பம் எனவும்

$a_1 = a - h$

$a_2 = a - 2h$

$a_3 = a - 3h$

எனவும் கொள்க. இங்குப் பின்னணி வேறுபாடுகள் கருதப்படுகின்றன.

பின்னணி வேறுபாடுகளின் அட்டவணை

X	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
⋮	⋮	⋮			
a_3	$a-3h$	$f(a-3h)$			
			$\triangle f(a-3h)$		
a_2	$a-2h$	$f(a-2h)$		$\triangle^2 f(a-3h)$	
			$\triangle f(a-2h)$		$\triangle^3 f(a-3h)$
a_1	$a-h$	$f(a-h)$		$\triangle^2 f(a-2h)$	
			$\triangle f(a-h)$		
a_0	a	$f(a)$			

வகுபட்ட வேறுபாடுகளைச் சாதாரண சம இடைவெளிக்குரிய பின்னணி வேறுபாடுகளாக மாற்ற

$$\underset{a_1}{\Delta} f(a_0) = \underset{a_0}{\Delta} f(a_1)$$

$$= \frac{f(a_0) - f(a_1)}{h}$$

$$= \frac{\triangle f(a_1)}{h}$$

$$= \frac{\triangle f(a-h)}{h}$$

என்று கிடைக்கிறது.

இது போலவே

$$\underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) = \underset{a_0 a_1}{\Delta^2} f(a_2)$$

$$= \frac{\underset{a_0}{\Delta} f(a_1) - \underset{a_1}{\Delta} f(a_2)}{2h}$$

$$= \frac{\dfrac{\triangle f(a-h)}{h} - \dfrac{\triangle f(a-2h)}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\triangle f(a-h) - \triangle f(a-2h)}{2!\ h^2}$$

$$= \frac{\triangle^2 f(a-2h)}{2!\ h^2}$$

இவ்வாறு பொதுவாக

$$\underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\triangle^n} f(a_0) = \frac{\triangle^n f(a-nh)}{n!\, h^n}$$

என எழுதுகிறோம்.

ஆகவே இந்தப் பின்னணி வேறுபாடுகளை வகுபட்ட வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிட

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{x-a}{h}\right) \triangle f(a-h)$$

$$+ \left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a+h}{h}\right) \frac{\triangle^2 f(a-2h)}{2!}$$

$$+ \ldots\ldots +$$

$$+ \left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a+h}{h}\right) \ldots\ldots \left(\frac{x-a+\overline{n-1}h}{h}\right) \frac{\triangle^n f(a-nh)}{n!}$$

$$+ R_n(x)$$

என்ற நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரம் கிடைக்கிறது. இதில் $R_n(x)$ என்பது மீதி உறுப்பாகும்.

$$X = \frac{x-a}{h} \quad \text{எனக் கொள்க.}$$

பின்னர் கீழ்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$f(a+Xh) = f(a) + \frac{X}{1!} \triangle f(a-h)$$

$$+ \frac{X(X+1)}{2!} \triangle^2 f(a-2h)$$

$$+ \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{X(X+1) \ldots\ldots (X+n-1)}{n!} \triangle^2 f(a-nh)$$

$$+ R_n(X)$$

இதையே எளிய முறையில் எழுத $a = 0$, $h = 1$ என்க.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \triangle f(-1) + \frac{x(x+1)}{2!} \triangle^2 f(-2)$$

$$+ \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{x(x+1)(x+2) \ldots\ldots (x+n-1)}{n!} \Delta^n f(-n)$$

$$+ R_n(x)$$

இங்கு $R_n(x) = \dfrac{x(x+1) \ldots\ldots (x+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} f(-n-1)$

என்பது மீதி உறுப்பாகும்.

மாதிரி : கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து $x = 27{\cdot}5$ -க்கு உரிய y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y
25	16·195
26	15·919
27	15·630
28	15·326

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
25	16·195			
		−0·276		
26	15·919		−0·013	
		−0·289		−0·002
27	15·630		−0·015	
		−0·304		
28	15·326			

இங்கு $f(27{\cdot}5)$ -ன் மதிப்பு $f(27)$, $f(28)$ என்ற இரு கடைசி மதிப்புகளுக்கு இடையே இருப்பதால் நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

$x = 28$ ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்க.

பின்னணி வேறுபாடுகள் (Backward differences) −0·304, −0·015, −0·002 என அறிவோம். $f(0) = 15{\cdot}326$ ஆகும்.

ஆரம்பமும் அலகும் மாற்றிய பின் x–ன் புது மதிப்பு

$x = \dfrac{27{\cdot}5 - 28}{1} = -0{\cdot}5$ என்றுகிறது.

நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\triangle f(-1) + \frac{x(x+1)}{2!}\triangle^2 f(-2) + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!}\triangle^3 f(-3)$$

இதில் $f(0)$, $\triangle f(-1)$, ... ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$f(-0{\cdot}5) = 15{\cdot}326 + \frac{(-0{\cdot}5)}{1!}(-0{\cdot}304) + \frac{(-0{\cdot}5)(0{\cdot}5)}{2!}(-0{\cdot}015) + \frac{(-0{\cdot}5)(0{\cdot}5)(1{\cdot}5)}{3!}(-0{\cdot}002)$$

$$= 15{\cdot}480$$

ஆகவே நாம் இடைச் செருகின மதிப்பு $f(27{\cdot}5) = 15{\cdot}480$ என்ருகிறது.

மாதிரி: $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ருல்,

$$\underset{x_2 x_1}{\triangle^2} f(x_0) = f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_0\, x_1\, x_3}$$ என நிரூபிக்க.

நிரூபணம் :—

வரையறையால்,

$$\underset{x_1}{\triangle} f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0}$$

$$= -\frac{1}{x_0\, x_1}$$

இது போலவே $\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) = -\frac{1}{x_1 x_2}$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \underset{x_2 x_1}{\Delta^2} f(x_0) = \frac{\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) - \underset{x_1}{\Delta} f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x_2 x_1} + \frac{1}{x_1 x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{-x_0 + x_2}{x_0 x_1 x_2 (x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{1}{x_0 x_1 x_2}$$

இதைக் கீழ்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0) f(x_1) f(x_2)$$

மாதிரி : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ என்றால்

$$\underset{a_1}{\Delta} f(a_0) = \frac{-(a_0 + a_1)}{a_0^2 a_1^2} \text{ எனவும்}$$

$$\underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) = \frac{(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2)}{a_0^2 a_1^2 a_2^2}$$

எனவும் நிரூபிக்க.

நிரூபணம் :—

வரையறையால்,

$$\underset{a_1}{\Delta} f(a)_0 = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2}}{a_1 - a_0}$$

$$= \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_0^2 a_1^2 (a_1 - a_0)}$$

$$= \frac{-(a_0 + a_1)}{a_0^2 a_1^2}$$

இது போலவே,

$$\underset{a_2}{\Delta} f(a_1) = \frac{-(a_1 + a_2)}{a_1^2\ a_2^2}$$

$$\underset{a_1 a_2}{\Delta^2} f(a_0) = \frac{\underset{a_1}{\Delta} f(a_2) - \underset{a_1}{\Delta} f(a_0)}{a_2 - a_0}$$

$$= \frac{\dfrac{-(a_1+a_2)}{a_1^2\ a_2^2} + \dfrac{(a_0+a_1)}{a_0^2\ a_1^2}}{a_2 - a_0}$$

$$= \frac{-a_0^2\ (a_2+a_1) + a_2^2\ (a_0+a_1)}{a_0^2\ a_1^2\ a_2^2\ (a_2 - a_0)}$$

$$= \frac{(a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2)}{a_0^2\ a_1^2\ a_2^2}$$

மாதிரி : 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ காணப்படுகிறது என்ருல், $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ என்ற மதிப்புகளைக் கொண்டு

$$f(x) = y\,f(0) + x f(1) + \frac{y(y^2-1)}{6} \Delta^2 f(-1) + \frac{x(x^2-1)}{6} \Delta^2 f(0)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $x+y=1$

x	:	-1	0	1	2
$f(x)$	:	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = \frac{(x-0)\ (x-1)\ (x-2)}{(-1-0)\ (-1-1)\ (-1-2)} f(-1)$$

$$+ \frac{(x+1)\ (x-1)\ (x-2)}{(0+1)\ (0-1)\ (0-2)} f(0)$$

$$+ \frac{(x+1)\ x\ (x-2)}{2\ (1)\ (-1)} f(1)$$

$$+ \frac{(x+1)\ x\ (x-1)}{3\ (2)\ (1)} f(2)$$

$$= \frac{-x(x-1)(x-2)}{6} f(-1) + \frac{(x+2)(x^2-1)}{2} f(0)$$

$$- \frac{(x+1)x(x-2)}{2} f(1) + \frac{x(x^2-1)}{6} f(2) \;\ldots\ldots\; (1)$$

$$\triangle^2 f(x) = (E-1)^2 f(x)$$
$$= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

என அறிவோம்.

அதாவது $f(x) = \triangle^2 f(x) + 2f(x+1) - f(x+2)$

$$\therefore \quad f(0) = \triangle^2 f(0) + 2f(1) - f(2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$f(-1) = \triangle^2 f(-1) + 2f(0) - f(1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-வது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$f(2) = \triangle^2 f(0) + 2f(1) - f(0) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என எழுதலாம்.

$f(-1)$, $f(2)$ இவற்றிற்கு (1)-வது, சமன்பாட்டில் மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(x) = \frac{-x(x-1)(x-2)}{6} [\triangle^2 f(-1) + 2f(0) - f(1)]$$

$$+ \frac{(x-2)(x^2-1)}{2} f(0) - \frac{(x+1)x(x-2)}{2} f(1)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{6} [\triangle^2 f(0) + 2f(1) - f(0)]$$

$$= \frac{y(y^2-1)}{6} \triangle^2 f(-1) + yf(0) + xf(1)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{6} \triangle^2 f(0)$$

இங்கு $x+y=1$: மேலும்

$$-x(x-1)(x-2) = (1-x)(x^2-2x)$$
$$= y(y^2-1)$$

இதையே 'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் நிருபிக்கலாம். (84) பக்கம் பார்க்க.

மாதிரி : 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்குரிய பல்லுறுப்புக் கோவை, $f(x)$ காண்க.

x :	0	1	3	4
y :	-12	0	6	12

(ஏப்ரல் 1968 III B.E.)

'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-4)}(-12) + 0 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)\,6}{(3-0)(3-1)(3-4)} + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}12$$

$$= x^3 - 8x^2 + 19x - 12 + x^3 - 5x^2 + 4x + x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$= 3x^3 - 17x^2 + 26x - 12$$

மாதிரி :

x :	0	1	2	3
$f(x)$:	11	7	6	10

என்றால் $f(2{\cdot}5)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$f(2{\cdot}5)$ என்பது $f(2)$, $f(3)$ என்ற இரு கடைசி மதிப்புகளுக்கு இடையே இருப்பதால் நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

வேறுபாட்டு அட்டவணை

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	11			
		-4		
1	7		3	
		-1		2
2	6		5	
		4		
3	10			

ஆரம்பத்தை 3 எனக் கொள்க.

4, 5, 2 என்பவை பின்னணி வேறுபாடுகள் ஆகும்.

x-ன் புது மதிப்பு

$$x = \frac{2\cdot 5 - 3\cdot 0}{1} = -0\cdot 5$$

நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \triangle f(-1) + \binom{x+1}{2} \triangle^2 f(-2)$$
$$+ \binom{x+2}{3} \triangle^3 f(-3) + \ldots\ldots$$

மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(-0\cdot 5) = 10 + (-0\cdot 5)\, 4 + \frac{(-0\cdot 5)(0\cdot 5)}{2} 5$$
$$+ \frac{(-0\cdot 5)(0\cdot 5)(1\cdot 5)}{6} 2$$
$$= 7\cdot 25$$
$$\therefore \quad f(2\cdot 5) = 7\cdot 25$$

பயிற்சி 2

1. வேறுபட்ட நிலைகளையுடைய வகுபட்ட வேறுபாடுகளுக்கு வரையறை கூறுக.

x:	4	5	7	10	11	13
$f(x)$:	148	200	394	1000	1310	2128

மேற்கண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வேறுபாட்டட்டவணையினை அமைக்கவும்.

இதனை விரிவுபடுத்தி, $f(3)$, $f(14)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. (செப்டம்பர் 1961)

2. 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கூறி நிறுவுக. சம இடைவெளியுள்ள கணக்குகளுக்கு இச் சூத்திரம் பயன்படுமா என்பதைக் கூறவும்.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி $f(27)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	14	17	31	35
$f(x)$:	68·7	64·0	44·0	39·1

(ஏப்ரல் 1961)

4) கீழ்க்காணும் மதிப்புகளிலிருந்து $f(6)$, $f(8)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x :	3	7	9	10
$f(x)$:	168	120	72	63

குறிப்பு : முதலில் சார்பு $f(x)$ ன் அமைப்பைக் கண்டு அதில் $x=6$, $x=8$ என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

5. அசம இடைவெளிகளுக்குரிய நியூட்டனின் பொதுவான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை எழுதி நிறுவுக. மேற்கூறிய சூத்திரத்திலிருந்து சம இடைவெளிகளுக்கான சூத்திரத்தைப் பெறுக.

6. $\underset{a}{\triangle} f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$\underset{y}{\triangle}\underset{z}{\triangle} x^3 = x+y+z$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$\underset{y}{\triangle}\underset{z}{\triangle} x^3 = \underset{y}{\triangle}\left[\frac{x^3-z^3}{x-z}\right]$$

$$= \underset{y}{\triangle}\left[x^2+xz+z^2\right]$$

$$= \frac{(x^2+xz+z^2) - (y^2+yz+z^2)}{x-y}$$

$$= \frac{x^2-y^2+z(x-y)}{x-y}$$

$$= x+y+z$$

7. பின்னணி வேறுபாடுகள் யாவை? எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

மீதி உறுப்புடன் கூடிய நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திலிருந்து நியூட்டனின் பிற்போக்கு சூத்திரத்தினை வருவிக்க.

8. கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி sin 15°, sin 75° ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

x (பாகைகளில்) :	0	30	60	90
$\sin x$:	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1

குறிப்பு : sin 15°, sin 75° ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண முறையே நியூட்டனின் முற்போக்கு, பிற்போக்குச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தவும்.

9. கீழே கொடுக்கப்பட்ட $x^{1/3}$-ன் அட்டவணைப்படுத்தப் பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து $(33{\cdot}2416)^{1/3}$-ன் மதிப்பினை ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை உபயோகித்துக் கணக்கிடவும்.

x :	$x^{1/3}$
29	4·07232
30	3·10723
31	3·14318
32	3·17480
33	3·20753
34	3·23961

குறிப்பு : நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும்.

10. கீழ்க் காணும் மதிப்புகளின் வேறுபாட்டட்டவணையிலிருந்து சார்பு $f(x)$-ஐக் காண்க.

x	$f(x)$
16	65536
17	83512
19	130321
23	279841
29	707281
31	923521

11. கீழ்க் காணும் மதிப்புகளின் வகுபட்ட வேறுபாடுகளிலிருந்து $f(19)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	$f(x)$
11	14·6
17	83·5
21	19·4
23	28·0
31	92·3

12. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து $f(4)$-ன் மதிப்பை 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

x :	−1	2	3	5
$f(x)$:	−5	1	7	61

13. $f(4)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	1	3	6
$f(x)$:	10	19	25

14. வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தாது, ஒரு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வருவிக்க.

15. இயல் வளைவில் y-அச்சின் உயரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி Q (2·0375)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x:	Q (x)
2·00	0·0540
2·01	0·0529
2·02	0·0519
2·03	0·0508
2·04	0·0498

16. n_1-ன் பல்வேறுபட்ட மதிப்புகளுக்குரிய F-ன் மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $n_1 = 15$ ஆக இருக்கும் பொழுது F-ன் மதிப்பைக் காண்க.

n_1 ;	F :
5	5·05
6	4·95
8	4·82
12	4·68
24	4·53

17. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, 35 வயதிற்குக் கீழுள்ள குற்றவாளிகளின் சதவிகிதத்தை 'இலக்ராஞ்ஜ்'ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

வயது (x வருடங்களுக்குக் கீழ்)	குற்றவாளிகளின் சதவிகிதம்
25	52·0
30	67·3
40	84·1
50	94·4

(ஆக்ரா 1934)

18. இடைச் செருகல் (interpolation) என்பதன் மூலம் நீவிர் புரிந்து கொண்டது என்ன? அதன் பயன்கள் யாவை?

முதல் பன்னிரண்டு மாதங்களில் குழந்தைகளின் இயல்பான எடைகள் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வயது (மாதங்களில்)	எடை (பவுண்டுகளில்)
0	7·5
2	10·25
5	15
8	16
10	18
12	21

இதிலிருந்து 7 மாதக் குழந்தையின் எடையைக் கணக்கிடுக. (பாட்னா 1940)

19. 'இலக்ரான்ஜ்'ன் சூத்திரத்தை நிறுவி அதன் பயன்களை விவரிக்க. இதற்கும், இதே மதிப்புகளைக் கொண்டு நிறுவப் பட்ட நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்திற்கும் வித்தியாசம் உண்டா என ஆராய்க. (ஏப்ரல் 1965)

20. 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க் கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $f(5)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	8	16

கணக்கிட்ட $f(5)$-ன் மதிப்பு, 2^5-ன் மதிப்பிலிருந்து ஏன் மாறுபடுகிறது என விளக்குக.

(குறிப்பு: $f(x)$-க்கு 4 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தால், சார்பு $f(x)$-ஐ ஒரு மூன்றும் படி பல்லுறுப்புக் கோவை யென வைத்துக் கொள்ளுகிறோம். ஆனால் உண்மையான சார்பு $f(x) = 2^x$, எனவே தான், உண்மையான $f(5)$-ன் மதிப்பிலிருந்து அதன் கணக்கிட்ட மதிப்பு மாறுபடுகின்றது.)

21. $x = 42{\cdot}5$-க்கு, கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளி லிருந்து, $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
40	0·7660
41	0·7547
42	0·7431
43	0·7314

(நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்துக.)

22. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து, சார்பின் அமைப் பினைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	2
2	4
4	18
7	32
11	256

23. 1881-லிருந்து 1941 வரை ஐக்கிய இந்தியாவின் மக்கட் தொகைப் பெருக்கத்தைக் கீழ்க் காணும் அட்டவணை காட்டுகிறது :

மக்கட் தொகைக் கணிப்பு வருடங்கள்	மக்கட் தொகை (இலட்சங்களில்)
1881	2501
1891	2795
1901	2838
1911	3030
1921	3056
1931	3381
1941	3888

1935-ன் மக்கட் தொகையைக் கணக்கிடுக.

(செப்டம்பர் 1964)

(குறிப்பு : நியூட்டனின் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.)

24. 'இலக்ரான்ஜ்' சூத்திரத்தின் மூலம்,

$$f(1) = f(3) - 0{\cdot}3\,[f(5) - f(-3)] + 0{\cdot}2\,[f(-3) - f(-5)]$$

என நிரூபிக்க.

தீர்வு : கீழ்க்காணும் மதிப்புகளிலிருந்து, 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(1)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	-5	-3	3	5
$f(x)$:	$f(-5)$	$f(-3)$	$f(3)$	$f(5)$

$$f(1) = f(-5)\,\frac{(1+3)\,(1-3)\,(1-5)}{(-5+3)\,(-5-3)\,(-5-5)}$$

$$+ f(-3)\,\frac{(1+5)\,(1-3)\,(1-5)}{(-3+5)\,(-3-3)\,(-3-5)}$$

$$+ \; f(3) \; \frac{(1+5)\,(1+3)\,(1-5)}{(3+5)\,(3+3)\,(3-5)}$$

$$+ \; f(5) \; \frac{(1+5)\,(1+3)\,(1-3)}{(5+5)\,(5+3)\,(5-3)}$$

$$= f(-5)\,(-0{\cdot}2) + f(-3)\,(0{\cdot}5) + f(3) + f(5)\,(-0{\cdot}3)$$

$$= f(3) + f(-3)\,[0{\cdot}3 + 0{\cdot}2] - 0{\cdot}2\,f(-5) - 0{\cdot}3\,[\,f(5)\,]$$

$$= f(3) - 0{\cdot}3\,[\,f(5) - f(-3)\,] + 0{\cdot}2\,[\,f(-3) - f(-5)\,]$$

3. மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்கள்

(Central Difference Formulae)

இப்பகுதியில் மைய வேறுபாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட ஒரு சில இடைச்செருகல் சூத்திரங்களைக் கருதுகிறோம். ஆகவே இச்சூத்திரங்கள் மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்கள் (Central Difference Formulae) என அழைக்கப் படுகின்றன. கொடுக்கப்பட்ட அநேக கணக்குகளில் மாறியின் மதிப்பு x_1 -க்கு உரிய, நாம் இடைச்செருக வேண்டிய $f(x_1)$-ன் மதிப்பு மையத்திலோ அல்லது மையத்திற்கு அருகிலோ இருந்தால் நியூட்டனின் சூத்திரம் துல்லியமான விடையைக் கொடுக்காது. ஏனெனில் நியூட்டனின் சூத்திரம் முன்னணி வேறுபாடுகளை (Forward differences) அடிப்படையாகக் கொண்டது. ஆனால் இம்முன்னணி வேறுபாடுகள் மையக் கோட்டிற்கு வெகு தொலைவில் உள்ளன.

ஆகவே இம்மாதிரி கணக்குகளில் x-ன் ஆரம்பத்தை (origin) மையத்திலோ அல்லது மையத்திற்கு வெகு அருகிலோ கருதுகிறோம். மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தினால் நாம் இடைச் செருகவேண்டிய $f(x_1)$-ன் மதிப்பை, மிக விரைவாகவும் அதே சமயத்தில் துல்லியமாகவும் காணலாம். ஏனெனில் இம் மைய வேறுபாடுகள், காணவேண்டிய $f(x_1)$-க்கு அருகிலுள்ள $f(-1)$, $f(1)$-க்கு உரிய கோடுகளுக்கு இடையே உள்ளன.

கீழே உள்ள அட்டவணையில் $f(-1)$, $f(1)$ இவற்றிற்கு உரிய கோடுகளுக்கு (......) இடைப்பட்ட

$\Delta f(-1)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(-1)$, $\Delta^3 f(-2)$, $\Delta^3 f(-1)$, $\Delta^4 f(-2)$ ...... என்ற வேறுபாடுகள் மைய வேறுபாடுகள் (Central differences) எனப்படும்.

'நியூட்டன்—காஸ்' ன் (Newton—Gauss) சூத்திரங்கள்.

கீழ்வரும் அட்டவணை x-ன் சில மதிப்புகளுக்கு உரிய சார்பின் $[f(x)$-ன்$]$ மதிப்புகளைக் கொடுக்கிறது.

x	$f(x)$
-3	$f(-3)$
-2	$f(-2)$
-1	$f(-1)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$
2	$f(2)$
3	$f(3)$

சார்பு, $f(x)$-ன் மதிப்புகளுக்குக் கீழ்வருமாறு வேறுபாடுகளின் அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
-3	$f(-3)$					
		$\Delta f(-3)$				
-2	$f(-2)$		$\Delta^2 f(-3)$			
		$\Delta f(-2)$		$\Delta^3 f(-3)$		
-1	$f(-1)$ …	… … … …	$\Delta^2 f(-2)$ …	… … … …	$\Delta^4 f(-3)$ …	… …
		$\Delta f(-1)$		$\Delta^3 f(-2)$		$\Delta^5 f(-3)$
0	$f(0)$		$\Delta^2 f(-1)$		$\Delta^4 f(-2)$	
		$\Delta f(0)$		$\Delta^3 f(-1)$		$\Delta^5 f(-2)$
1	$f(1)$ …	… … … …	$\Delta^2 f(0)$ …	… … … …	$\Delta^4 f(-1)$ …	… …
		$\Delta f(1)$		$\Delta^3 f(0)$		
2	$f(2)$		$\Delta^2 f(1)$			
		$\Delta f(2)$				
3	$f(3)$					

நியூட்டனின் முற்போக்கு சூத்திரத்தை (Newton's Forward Formula)க் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots$$

இதில் $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0)$, $\Delta^3 f(0)$ என்பன முன்னணி வேறுபாடுகள்.

இவற்றிற்கு மைய வேறுபாடுகளால் கீழ் வருமாறு

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 f(0) &= \Delta^2 f(-1) + \Delta^3 f(-1) \\ \Delta^3 f(0) &= \Delta^3 f(-1) + \Delta^4 f(-1) \\ \Delta^4 f(0) &= \Delta^4 f(-2) + \Delta^5 f(-2) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

பிரதியிட நியூட்டனின் சூத்திரம்

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} [\Delta^2 f(-1) + \Delta^3 f(-1)]$$

$$+ \binom{x}{3} [\Delta^3 f(-1) + \Delta^4 f(-1)] + \ldots\ldots$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதையே

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-1) + \binom{x+1}{4} [\Delta^4 f(-2) + \Delta^5 f(-2)] + \ldots\ldots$$

$$= f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-1) + \binom{x+1}{4} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

என்றும் எழுதலாம்.

இந்த சூத்திரம் 'காஸ்'-ன் முற்போக்குச் சூத்திரம் (Gauss's Forward Formula) எனப்படும்.

x நேர் திசையில் (positive direction) அளக்கப்பட்டால் 'காஸ்'-ன் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஆனால் x எதிர் திசையில் (negative direction) அளக்கப்பட்டால் நாம் மற்றொரு சூத்திரமாகிய 'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இந்த 'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரம் (Gauss's Backward Formula) $f(-1)$, $f(0)$ என்பவற்றிற்குரிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மைய வேறுபாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரம் (Gauss's Backward Formula).

மேலே (1)-ல் கூறியுள்ள தொடர்புகளையும் $\triangle f(0) = \triangle f(-1) + \triangle^2 f(-1)$ என்ற தொடர்பையும் பயன்படுத்தி நியூட்டனின் சூத்திரத்திலிருந்து 'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தை வருவிக்கிறோம் (derive).

ஆகவே நியூட்டனின் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \triangle f(0) + \binom{x}{2} \triangle^2 f(0) + \ldots\ldots$$

இதில் $\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(0)$ ...... இவற்றிற்கு மைய வேறுபாடுகளை மேற்கூறிய தொடர்புகளிலிருந்து பிரதியிட

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} [\triangle f(-1) + \triangle^2 f(-1)]$$

$$+ \binom{x}{2} [\triangle^2 f(-1) + \triangle^3 f(-1)]$$

$$+ \binom{x}{3} [\triangle^3 f(-1) + \triangle^4 f(-1)] + \ldots\ldots$$

$$= f(0) + \binom{x}{1} \triangle f(-1) + \binom{x+1}{2} \triangle^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} [\triangle^3 f(-2) + \triangle^4 f(-2)]$$

$$+ \binom{x+1}{4} [\triangle^4 f(-2) + \triangle^5 f(-2)] + \ldots\ldots$$

$$= f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(-1) + \binom{x+1}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-2) + \binom{x+2}{4} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

என்ற 'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரம். (Sterling's Formula)

'காஸ்'-ன் முற்போக்கு, பிற்போக்கு சூத்திரங்களுக்குச் சராசரி காண்பதால் 'நியூட்டன்-ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தை வருவிக்கிறோம்.

'காஸ்'-ன் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(o) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-1) + \binom{x+1}{4} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

'காஸ்'-ன் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(-1) + \binom{x+1}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-2) + \binom{x+2}{4} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

இவ்விரண்டின் சராசரியைக் கீழ் வருமாறு காண்கிறோம்.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{2} [\Delta f(0) + \Delta f(-1)]$$

$$+ \frac{x^2}{2!} [\Delta^2 f(-1)]$$

$$+ \binom{x+1}{3} [\Delta^3 f(-1) + \Delta^3 f(-2)]$$

$$+ \frac{x^2 (x^2 - 1)}{4!} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

இதுதான் 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரம்.

இதே 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தைக் கீழ்வருமாறு வேறு விதமாகவும் எழுதலாம்.

$$f(x) = f(0) + x\mu\,\delta f(0) + \frac{x^2}{2!}\delta^2 f(0) + \frac{x(x^2-1)}{3!}\mu\,\delta^3 f(0) + \ldots\ldots$$

இங்கு δ, μ என்பன மைய வேறுபாட்டுச் செயலிகளாகும் (Central difference operators).

கீழ் வருவன முறையே δ, μ என்பவற்றின் வரையறைகள்:

$$\delta f(x) = f(x+\tfrac{1}{2}) - f(x-\tfrac{1}{2})$$
$$= (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x)$$
$$\mu f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x+\tfrac{1}{2}) + f(x-\tfrac{1}{2})]$$
$$= \tfrac{1}{2}[E^{1/2} + E^{-1/2}] f(x)$$

மேற்கண்ட வரையறைகளிலிருந்து δ, μ, E இவற்றிற்குரிய தொடர்புகளைக் கீழ் வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$\delta \equiv (E^{1/2} - E^{-1/2})$$
$$\mu \equiv \tfrac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$$

'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரம் (Bessel's Formula)

$$\triangle f(0) = f(1) - f(0)$$

அல்லது $f(0) = f(1) - \triangle f(0)$

$$\triangle^2 f(-1) = \triangle^2 f(0) - \triangle^3 f(-1)$$
$$\triangle^4 f(-2) = \triangle^4 f(-1) - \triangle^5 f(-2)$$

என்ற தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தி 'நியூட்டன்-காஸ்'-ன் சூத்திரத்திலிருந்து 'நியூட்டன்—பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தை வருவிக்கிறோம்.

'காஸ்'-ன் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1}\triangle f(0) + \binom{x}{2}\triangle^2 f(-1) + \binom{x+1}{3}\triangle^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

இதில் மேற்கூறிய தொடர்புகளைப் பயன்படுத்த

$$f(x) = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2}[f(1) - \Delta f(0)]$$

$$+ \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \frac{1}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x}{2} \frac{1}{2} [\Delta^2 f(0) - \Delta^3 f(-1)]$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \left(x - \frac{1}{2}\right) \Delta f(0)$$

$$+ \binom{x}{2} \frac{1}{2} [\Delta^2 f(0) + \Delta^2 f(-1)]$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-\frac{1}{2})}{3!} \Delta^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

இதுதான் 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரம்.

'எவரெட்'–ன் சூத்திரம். (Everett's Formula)

'காஸ்'–ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி 'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தை வருவிக்கிறோம் (derive).

இதற்கு 'காஸ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3} \Delta^3 f(-1) + \binom{x+1}{4} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

இச் சூத்திரத்திலிருந்து இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளை (even order differences) மட்டும் கொண்ட ஒரு சூத்திரத்தைப் பெற விரும்புகிறோம். ஆகவே மேலே கூறிய 'காஸ்'-ன் சூத்திரத்தில் உள்ள ஒற்றை நிலை வேறுபாடுகளை (odd order differences) நீக்க, கீழ்வரும் தொடர்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\triangle f(0) = f(1) - f(0)$$
$$\triangle^3 f(-1) = \triangle^2 f(0) - \triangle^2 f(-1)$$
$$\triangle^5 f(-2) = \triangle^4 f(-1) - \triangle^4 f(-2)$$

... ...

... ...

... ...

ஒற்றை நிலை வேறுபாடுகள் நீங்கிய 'காஸ்'-ன் சூத்திரத்தைக் கீழ்வருமாறு எழுதுகிறோம்.

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1}\Big[f(1) - f(0)\Big] + \binom{x}{2}\triangle^2 f(-1)$$
$$+ \binom{x+1}{3}[\triangle^2 f(0) - \triangle^2 f(-1)]$$
$$+ \binom{x+1}{4}\triangle^4 f(-2)$$
$$+ \binom{x+2}{5}[\triangle^4 f(-1) - \triangle^4 f(-2)] + \ldots\ldots$$
$$= (1-x) f(0) + \binom{x}{1} f(1) - \binom{x}{3}\triangle^2 f(-1)$$
$$+ \binom{x+1}{3}\triangle^4 f(-2) - \binom{x+1}{5}\triangle^4 f(-2)$$
$$+ \binom{x+2}{5}\triangle^4 f(-1) + \ldots\ldots$$

$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ என்பதைப் பயன்படுத்தி எழுதியுள்ளோம்.

$1 - x = y$ எனக் கொள்க.

ஆகையால் $- \binom{x}{3} = \binom{y+1}{3}$

$$- \binom{x+1}{5} = \binom{y+2}{5}$$

என்றுகின்றன.

இவைகளைப் பிரதியிட

$$f(x) = y\,f(0) + \binom{y+1}{3}\Delta^2 f(-1) + \binom{y+2}{5}\Delta^4 f(-2)$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$+ x f(1) + \binom{x+1}{3}\Delta^2 f(0) + \binom{x+2}{5}\Delta^4 f(-1)$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

என்று இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளைக் கொண்ட சூத்திரம் கிடைக்கிறது. இதுதான் 'எவரெட்'-ன் சூத்திரம்.

மாதிரி 1 :

கீழ்வரும் அட்டவணையிலிருந்து log sin 0° 16′ 8·5″-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\log \sin 0^\circ\, 16'\, 7'' = 7{\cdot}670999$$
$$8'' = 7{\cdot}671449$$
$$9'' = 7{\cdot}671897$$
$$10'' = 7{\cdot}672345$$

(செப்டம்பர் 1963)

இந்தக் கணக்கில் $f(a + xh) = \log \sin (a + xh)$ எனக் கொள்க.

ஆரம்பம் $a = (0^\circ\, 16'\, 8'')$ எனவும் அலகு $h = 1''$ எனவும் கொள்க. X, x என்பவற்றை முறையே கொடுக்கப்பட்ட மாறி எனவும் புது மாறி எனவும் கொள்க.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad x &= \frac{X - a}{h} \\ \text{அல்லது} \quad X &= a + xh \end{aligned}\right\} \text{ என்ருகிறது.}$$

log sin (0° 16′ 8·5″) = f(0° 16′ 8·5″)-ன் மதிப்பை நாம் காணவேண்டும். அதாவது

$$x_1 = \frac{X_1 - a}{h} = \frac{0^\circ\, 16'\, 8{\cdot}5'' - 0^\circ\, 16'\, 8''}{1''}$$

$$= 0{\cdot}5 \text{ க்கு}$$

உரிய $f(x_1)$-ன் அல்லது $f(0\cdot5)$-ன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். தசமப் புள்ளிகளை நீக்கிய பின் சார்பு மதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட வேறுபாட்டு அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
−1	7670999			
		450		
0	7671499		−2	
		448		2
1	7671897		0	
		448		
2	7672345			

'நியூட்டன்-காஸ்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \triangle f(0) + \binom{x}{2} \triangle^2 f(-1) + \binom{x+1}{3} \triangle^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

$$f(0\cdot5) = 7671449 + (0\cdot5)\,448 + \frac{(0\cdot5)(-0\cdot5)}{2}(-2) + \frac{(1\cdot5)(0\cdot5)(-0\cdot5)}{3!}(2)$$

$$= 7671673\cdot125$$

∴ தசமப்புள்ளியைத் திரும்ப இட்டு

$$\log \sin (0^\circ\ 16'\ 8\cdot5'') = 7\cdot67163125$$

எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: $x = 0\cdot5$ என்றால் 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரமே சிறந்தது.

ஆகவே 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[f(0) + f(1)\Big] + \left(x - \frac{1}{2}\right)\triangle f(0) + \left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\triangle^2 f(0) + \triangle^2 f(-1)\right] + \frac{x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3!}\triangle^3 f(-1)$$

$$f(0{\cdot}5) = \frac{1}{2}[\,7671499 + 7671897\,] + 0 + \frac{1}{2}\,\frac{(0{\cdot}5)\,(-\,0{\cdot}5)}{2}\,[\,-\,2 + 0\,] + 0$$

$$= 7671698 + 0{\cdot}125$$

$$= 7671698{\cdot}125.$$

∴ தசமப் புள்ளியைத் திரும்ப இட்டு

$$\log \sin 0^\circ\, 16'\, 8{\cdot}5'' = \bar{7}{\cdot}671698125$$

எனக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 2: கீழே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து, 'நியூட்டன்-ஸ்டர்லிங்' சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி sin 25° 40′ 30″-ன் மதிப்பைக் காண்க.

sin 25° 40′ 0″ = 0·433 134 79
20″ = 0·433 222 18
40″ = 0·433 309 56
sin 25° 41′ 0″ = 0·433 396 95
20″ = 0·433 484 33

இவ்வாறு கண்ட விடையை 'நியூட்டன்–பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி வந்த விடையுடன் ஒப்பிட்டுச் சரி பார்க்க.

சார்பு மதிப்புகளுக்கு தசமப்புள்ளி நீக்கியபின் கீழ் வருமாறு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

a	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
25′ 40′ 0″	−1	43313479				
			8739			
20″	0	43322218		−1		
			8738		2	
40″	1	43330956		1		−4
			8739		−2	
25° 41′ 0″	2	43339695		−1		
			8738			
20″	3	43348433				

இங்கு ஆரம்பம் $a = 25^\circ\, 40'\, 20''$ இடைவெளித்தூரம் $h = 20''$ எனக் கொள்ளலாம்.

X என்பது கொடுக்கப்பட்ட மாறி என்ருல்

$$X = a + xh$$

அல்லது $$x = \frac{X - a}{h}$$

என்பது புது மாறியாகும்.

$f(X) = f(25^\circ\, 40'\, 30'')$-ன் மதிப்பைக் காண

$$f(x) = f\left[\frac{25^\circ\, 40'\, 30'' - 25^\circ\, 40'\, 20''}{20''}\right]$$

$= f\left(\frac{1}{2}\right)$-ன் மதிப்பைக் கண்டால் போதும்.

'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + x\left[\frac{\triangle f(0) + \triangle f(-1)}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\triangle^2 f(-1) + \ldots + \ldots$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 43322218 + \frac{1}{2}\left[\frac{8739 + 8738}{2}\right] + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}[-1] + \ldots\ldots$$

$$= 43322218 + 4369{\cdot}250 - 0{\cdot}125$$

$$= 43326587{\cdot}125$$

தசமப்புள்ளியைத் திரும்ப இட்டு $\sin 25^\circ\, 40'\, 30'' = 0{\cdot}43326587$ எனக் காண்கிருேம்.

இந்த விடையைப் பெற முதல் இரு உறுப்புக்களே போதுமானது என்பது இங்கு குறிப்பிடத் தக்கதாகும்.

'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = \frac{f(1) + f(0)}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\triangle f(0)$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\triangle^2 f(0) + \triangle^2 f(-1)}{2}\right] + \frac{x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3!} \times \triangle^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{43322218 + 43330956}{2} + 0$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{-1+1}{2}\right] + 0$$

$$= 43326587$$

ஆகவே sin 25° 40′ 30″ = 0·43326587 என்று தசமப் புள்ளியுடன் எழுதுகிறோம்.

குறிப்பு : 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி மிகவும் எளிதாக விடை கண்டோம். ஆகவே $x = 0·5$ என்றால் 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரம் மிகவும் பொருத்தமானது என அறிகிறோம்.

மாதிரி 3 : ஒரு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து log (3375)-ன் மதிப்பைக் காண்க.

X	log X
310	2·4914
320	2·5052
330	2·5185
340	2·5315
350	2·5441
360	2·5563

$$\log 3375 = \log 10 + \log 337·5$$
$$= 1 + \log 337·5$$

என எழுதலாம்.

log (3375)-ன் மதிப்பைக் காண கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து முதலில் log (337·5)-ன் மதிப்பைக் கண்டு பின்னர் அத்துடன் ஒன்றைக் கூட்ட வேண்டும்.

இங்கு ஆரம்பம் $a = 330$

இடை வெளித்தூரம் $h = 10$ ஆகும்.

X என்பது புது மாறி என்றால், $X = a + xh$.

அல்லது $x = \dfrac{X - a}{h}$ என்றாகும்.

$\therefore \quad X = 337{\cdot}5$ என்றால்,

$$x = \frac{337{\cdot}5 - 330}{10} = 0{\cdot}75$$

இங்கு $x = 0{\cdot}75$ என்ற மதிப்பு 0-வுக்கும் 1-க்கும் இடையே இருப்பதால் 'பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தையோ அல்லது 'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தையோ பயன்படுத்தலாம்.

'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

தசமப் புள்ளி நீக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்குக் கீழ்வரும் வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

X	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
310	−2	24914				
			138			
320	−1	25052		−5		
			133		2	
330	0	25185		−3		−3
			130		−1	
340	1	25315		−4		1
			126		0	
350	2	25441		−4		
			122			
360	3	25563				

'இலாப்லாஸ்-எவரெட்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = xf(1) + \frac{x(x^2-1)}{3!}\triangle^2 f(0) + \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{5!}\triangle^4 f(-1)$$

$$+\ yf(0) + \frac{y(y^2-1)}{3!}\triangle^2 f(-1) + \frac{y(y^2-1)(y^2-4)}{5!}\triangle^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

இங்கு $y = 1 - x$

$$\therefore \quad f(0{\cdot}75) = (0{\cdot}75)\,2{\cdot}5315 + \frac{(0{\cdot}75)(-0{\cdot}4375)(-0{\cdot}0004)}{6}$$

$$+ (0{\cdot}25)\,2{\cdot}5185 + \frac{(0{\cdot}25)(-0{\cdot}9375)(-0{\cdot}0003)}{6}$$

$$= 2{\cdot}52828$$

$$\therefore \quad \log 3375 = 1 + \log 337{\cdot}5$$

$$= 1 + 2{\cdot}52828$$

$$= 3{\cdot}52828$$

மாதிரி 4: 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(5{\cdot}44)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

X	$f(x)$
3·4	1156
4·4	1936
5·4	2916
6·4	4096
7 4	5476
8·4	7056

$a = 5{\cdot}4$ ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்க.
இங்கு $h = 1$.
புது மாறி x-ன் மதிப்பு

$$x = \frac{X - a}{h} = \frac{5{\cdot}44 - 5{\cdot}40}{1}$$

$= 0{\cdot}04$ என்றாகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை கீழே அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

X	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
3·4	−2	1156		
			780	
4·4	−1	1936		200
			980	
5·4	0	2916		200
			1180	
6·4	1	4096		200
			1380	
7·4	2	5476		200
			1580	
8·4	3	7056		

மேலேயுள்ள அட்டவணையில் இரண்டாம் நிலை வேறுபாடுகள் சமம்.

'ஸ்டர்லிங்' ன் சூத்திரத்தை (Stirling's formula)க் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + x\left[\frac{\Delta f(0) + \Delta f(-1)}{2}\right]$$

$$+ \frac{x^2}{2}\,\Delta^2 f(-1) + \ldots\ldots$$

$f(0)$, $\Delta f(0)$ ...... ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(5{\cdot}44) = 2916 + (0{\cdot}04)\left(\frac{2160}{2}\right) + \frac{0{\cdot}0016}{2}\,200$$

$$= 2916 + 43{\cdot}20 + 0{\cdot}16$$

$$= 2959{\cdot}36$$

மாதிரி 5 : ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(15)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

X	$f(x)$
10	51·21
12	60·24
14	75·32
16	96·02
18	119·78
20	151·45

(ஏப்ரல் 1967)

$a = 14$ என்பதை ஆரம்பமாகக் கொள்க. இங்கு $h = 2$.

புது மாறி x-ன் மதிப்பு $x = \dfrac{X - a}{h}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x = \frac{15 - 14}{2} = 0{\cdot}5$$

ஆகவே 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரம் மிகவும் பொருத்தமானதாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

X	$f(x)$	(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
10	51·21	−2					
			9·03				
12	60·24	−1		6·05			
			15·08		−0·43		
14	75·32	0		5·62		−2·13	
			20·70		−2·56		9.54
16	96·02	1		3·06		7·41	
			23·76		4·85		
18	119·78	2		7·91			
			31·67				
20	151·45	3					

'பெஸ்ஸல்' ன் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \Delta f(0)$$

$$+ \binom{x}{2}\left[\frac{\Delta^2 f(0) + \Delta^2 f(-1)}{2}\right]$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-\frac{1}{2})}{6} \Delta^3 f(-1) + \ldots\ldots$$

இதில் $f(0)$, $f(1)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0)$, ... ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(0{\cdot}5) = 85{\cdot}67 + 0 + \frac{(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)}{2}(4{\cdot}34)$$

$$+ 0 + \frac{1{\cdot}5\,(0{\cdot}5)(-0{\cdot}5)(-1{\cdot}5)}{24}(2{\cdot}64)$$

$$= 85{\cdot}67 - 0{\cdot}5425 + 0.061875$$

$$= 85{\cdot}189375$$

ஆகவே $f(15) = 85{\cdot}189375$

மாதிரி 6 :

X	$f(x)$
0	143
4	158
8	177
12	199

என்றால் $f(5)$–ன் மதிப்பை 'பெஸ்ஸல்'–ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க. (ஏப்ரல் 1968)

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்குக் கீழ் வருமாறு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

X	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
0	−1	143			
			15		
4	0	158		4	
			19		−1
8	1	177		3	
			22		
12	2	199			

$a=4$ என்பதை ஆரம்பமாகக் கொள்க.

$X=5$ ஆனால் புது x–ன் மதிப்பு

$$x = \frac{X-a}{h} = \frac{5-4}{4} = 0{\cdot}25 \text{ ஆகும்.}$$

'பெஸ்ஸல்'–ன் சூத்திரத்தைக் (Bessel's formula) கருதுக.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(0)+f(1)] + (x-\tfrac{1}{2})\,\triangle f(0)$$

$$+ \binom{x}{2}\frac{[\triangle^2 f(0) + \triangle^2 f(-1)]}{2}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-\frac{1}{2})}{6}\,\triangle^3 f(-1)$$

$f(0)$, $f(1)$, . $\Delta f(0)$ ...... ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட

$$f(5) = \frac{158 + 177}{2} + (-0{\cdot}25)\,19$$

$$+ \frac{(0{\cdot}25)\,(-0{\cdot}75)}{2}\,\frac{(4+3)}{2}$$

$$+ \frac{(0{\cdot}25)\,(-0{\cdot}75)\,(-0{\cdot}25)}{6}\,(-1)$$

$$= 167{\cdot}5 \;-4{\cdot}75 \;-0{\cdot}0078125 \;-0{\cdot}328125$$

$$= 162{\cdot}4140625$$

பல் வேறுபட்ட மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களின் பொருத்தம்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் மையத்திலிருக்கும் மாறியின் ஒரு மதிப்புக்குரிய சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண நாம் ஏதேனும் ஒரு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்துவோம். ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கிற்குப் பொருத்தமான ஒரு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் நலம். குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்டே மிகச் சரியான விடையை அளிக்கும் இடைச் செருகல் சூத்திரமே மிகவும் பொருத்தமானது என்று கூறப்படும். எனவேதான், ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் ஒவ்வொரு சூத்திரத் தைப் பயன்படுத்துகிறோம். சில சமயங்களில், பூச்சிய வேறுபாடுகளின் குத்து வரிசையை (column) அடையு முன்னரே இரண்டு சூத்திரங்கள் முடிந்துவிடுவதும் உண்டு.

மற்ற உறுப்புக்களை ஒதுக்கித்தள்ள, ஒற்றை நிலைச் சராசரி வேறுபாடுகளைப் பொறுத்தமட்டில், 'காஸ்'-ன் சூத்திரமே, அதே இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளின் வழியே செல்லும் 'ஸ்டெர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தை விட மிகச் சரியானது என நாம் காணலாம். மற்ற உறுப்புக்களை ஒதுக்கித்தள்ளி, இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளை மட்டும் கருதுவோமாகில், பெஸ்ஸலின் சூத்திரம் 'காஸ்'-ன் சூத்திரத்தை விட மிகச் சரியான விடையைக் கொடுக்கிறது என நாம் காணலாம்.

'காஸ்'-ன் சூத்திரத்தில் பயன்படுத்தப்படும் வேறுபாடு கள் $\Delta f(0)$, $\Delta f(-1)$, $\Delta^2 f(-1)$, $\Delta^3 f(-2)$ ஆகியவை

சாதாரண மைய வேறுபாடுகள் எனப்படும். 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தில் பயன்படும்

$$\left[\frac{\triangle f(0)+\triangle f(-1)}{2}\right], \left[\frac{\triangle^3 f(-1)+\triangle^3 f(-2)}{2}\right]$$

போன்ற அமைப்புள்ள வேறுபாடுகள் சராசரி வேறுபாடுகள் எனப்படும்.

X என்பது கொடுக்கப்பட்ட மாறியானல், x-ஐ $X=a+xh$ என இருக்கும்படியான புதுமாறி எனக் கொள்க. இங்கு 'a' என்பது ஆரம்பமும், 'h' என்பது இடைவெளித் தூரமும் ஆகும்.

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ என இருப்பின், 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தை உபயோகித்தல் நலம். ஏனெனில், மேற்கூறிய ஒற்றை நிலைச் சராசரி வேறுபாடுகள் $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$ எனும் இரு கோடுகளுக்கிடையே அமைந்துள்ளன. இது இரட்டை நிலை வேறுபாடுகளுடன் முடிந்து விட்டால், நாம் 'ஸ்டர்லிங்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$0<x<1$ என இருப்பின், 'பெஸ்ஸல்'-ன் சூத்திரத்தை உபயோகித்தல் நலம். ஏனெனில், சராசரி வேறுபாடுகள் $f(0)$, $f(1)$ எனும் இருகோடுகளுக்கிடையே அமைந்துள்ளன. $x=\frac{1}{2}$ என இருக்கும் பொழுது, குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டே மிகச் சரியான விடைகளை பெஸ்ஸலின் சூத்திரம் அளிக்கிறது. ஏனெனில், இதில் மாறி மாறி வரும் காரணி $(x-\frac{1}{2})$ மறைந்து விடுகின்றது.

$x=\frac{1}{2}$ என இருக்கும் பொழுது, பெஸ்ஸலின் சூத்திரம்,

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{8}\left[\frac{\triangle^2 f(-1)+\triangle^2 f(0)}{2}\right]+\frac{3}{128}\left[\frac{\triangle^4 f(-2)+\triangle^4 f(-1)}{2}\right]$$

என ஆகிவிடுகிறது.

மாறி x, 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் உள்ள பொழுதும், குறிப்பாக $x=\frac{1}{4}$ அல்லது $x=\frac{3}{4}$ என்றிருக்கும் பொழுதும், நாம் 'இலாப்லாஸ்—எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். பத்து அல்லது ஐந்து வருட இடை வெளிகளில் தொடர்ந்த மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது, தனித்தனி உறுப்புகளைக் காணவும் நாம் 'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இடைவெளிப் பகுப்பில், தனித்தனி உறுப்புகளைக் காண இச் சூத்திரம் எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதை பகுதி 5 ல் கொடுக்கப்பட்ட மாதிரி தெளிவாகக் காட்டுகின்றது.

பயிற்சி 3

1. இடைச் செருகலுக்கான ஒரு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பெறுக. அதிலிருந்து உண்டாகும் நடைமுறை அனுகூலங்கள் யாவை? கீழே கொடுக்கப்பட்ட வருடாந்திர பிரீமிய அட்டவணையிலிருந்து, பொருத்தமான ஒரு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தின் மூலம் 25 வது வயதிற்குரிய வருடாந்திர பிரீமியத்தைக் காண்க.

வயது	பிரீமியம்
20	0·01427
24	0·01581
28	0·01772
32	0·01996

குறிப்பு: $a = 24$ என்றால், $h = 4$ க்கு $x = 0{\cdot}2$.

$-\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2}$ ஆக இருப்பதால், ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக. (ஏப்ரல் 1960)

2. 'மைய வேறுபாடுகள்' என்பவை யாவை? மைய வேறுபாடுகளை மட்டும் உள்ளடக்கிய ஒரு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வருவிக்க.

3. இடைச் செருகல் கணக்கின் இயல்பினை விளக்குக. ஒரு சார்பின் இரட்டை நிலை மைய வேறுபாடுகள் மட்டும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் பொழுது, ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வருவிக்க.

குறிப்பு: 'எவரெட்'டின் சூத்திரம்.

4. இடைச் செருகலுக்கான 'ஸ்டர்லிங்' கின் சூத்திரத்தை வருவிக்க. அது எங்கு பயன்படுத்தப் படுகின்றதென்று காட்டுக.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, $f\,(1{\cdot}0212)$ மதிப்பைத் தோராயமாகக் கணக்கிடுக.

X	f (X)
1·010	1·64463
1·015	2·10524
1·020	2·69159
1·025	2·43711
1·03	4·38391

(ஏப்ரல் 1966)

5. கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட மதிப்புக்களி லிருந்து, நியூட்டன்—ஸ்டர்லிங் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $f(1\cdot18)$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க:

x	$f(x)$
0·5	0·34375
0·6	0·87616
0·7	1·47697
0·8	2·17408
0·9	3·00139
1·0	4·00000
1·1	5·21941
1·2	6·71872

(செப்டம்பர் 1960)

6. $y : e^{-x^2}$ என்ற வளைவின் பரப்பு $A(x)$, x-ன் வெவ் வேறு மதிப்புகளுக்கு, கீழே அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளது. தகுந்த இடைச் செருகல் சூத்திரத்தின் மூலம், $x : 0\cdot025$ க்கு $A(x)$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக. இந்த மதிப் பைக் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்க:

$$A(0) - A(x) : x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot2\,!} - \frac{x^7}{7\cdot3\,!} + \ldots\ldots$$

x	$A(x)$
0·00	0·8862 2692
0·01	0·8762 2724
0·02	0·8662 2957
0·03	0·8562 3590
0·04	0·8462 4822
0·05	0·8362 6853

(ஏப்ரல் 1961)

குறிப்பு: இங்கே, $x = \frac{1}{2}$ ஆக இருப்பதால், (அதாவது $0 \leq x \leq 1$), 'பெஸ்ஸல்' சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக. குறிப்பாக, $x = \frac{1}{2}$ என்றிருக்கும் பொழுது, பெஸ்ஸல் சூத்திரம் மிகவும் பொருத்தமான தொன்றுகும்.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து, $x = 24° 36' 42''$க்கு F (x)–ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக. இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைத் தேர்ந்தெடுப்பது பற்றி விவரிக்க :

x	F (x)
21	0·370634373
22	0·388705151
23	0·406834931
24	0·425026420
25	0·443282339
26	0·461605363
27	0·479998225

குறிப்பு: $a : 24°$ ஆரம்பம் எனவும், $h = 1$ இடைவெளித் தூரம் எனவும் வைத்துக் கொண்டால், $X = \frac{x - a}{h} = 0·717.$ எனவே, எவரட் சூத்திரம் பொருத்தமானதாகும்.

8. ஒரு சார்பின் அடுத்தடுத்த இருமதிப்புகளையும், அதன் வேறுபாடுகளையும் கொண்டு ஒரு இடைவெளியை இரு சம கூருக்குவதற்குமட்டும் மூன்றும் நிலை வேறுபாடு வரை கருதி ஒரு சூத்திரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

குறிப்பு: பெஸ்ஸல் சூத்திரம். இரு அடுத்தடுத்த மதிப்புக்கள் $f(0)$-வும் $f(1)$-ம் ஆகும். வேறுபாடுகள் $\triangle^2 f(-1)$-ம் $\triangle^2 f(0)$-ம். பக்கம் 83.

9. பல்வேறு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களின் பொருத்தம் பற்றி விரிவாக ஆராய்க.

10. நியூட்டன்-காஸ் பிற்போக்குச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $x = 43$-க்கு $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
25	25
30	32
35	40
40	47
45	55
50	64

11. மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை மாறிலியாக வைத்துக் கொண்டு, நிருபிக்க:

$$f(x)=x \cdot f(1) + x \cdot \frac{(x^2-1)}{6}\triangle^2 f(0) + yf(0) + \frac{y(y^2-1)}{6}\triangle^2 f(1)$$

இதில் $y = 1 - x$.

குறிப்பு: எவரட் சூத்திரத்தை வருவித்து, $\triangle^4 f(x)=0$ என வைக்கவும். ஏனெனில், மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் மாறிலியாக வைக்கப்பட்டன.

12. கீழ்க் கண்ட அட்டவணையினின்று, பெஸ்ஸல் சூத்திரத்தைக் கொண்டு, $f(28)$-ன் மதிப்பைக்காண்க:

x	$f(x)$
15	10·3797
20	12·4622
25	14·0939
30	15·3725
35	16·3742
40	17·1591

13. 'ஸ்டர்லிங்' கின் சூத்திரத்தின் மூலம், $f(5{\cdot}44)$-ன் மதிப்பைக் காண்க:-

x	$f(x)$
3·4	1156
4·4	1936
5·4	2916
6·4	4096
7·4	5476
8·4	7056

14. இயல் நிலை மாறி மதிப்பு, t க்கும் ∞-க்கும் இடையில் இருப்பதற்கு நிகழ்வு எண்கள் (probabilities) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $[P(t) = \int_t^{\infty} Q(t)\,dt,\ Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\, t^2}]$.

t	$P(t)$
0·65	0·25785
0·66	0·25463
0·67	0·25143
0·68	0·24825
0·69	0·24510

$t = 0{\cdot}6745$-க்கு $P(t)$ மதிப்பைக் காண்பதற்கு, ஒரு பொருத்தமான இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துக.

15. 'காஸி'ன் சம இடைவெளி கொண்ட இடைச் செருகல் சூத்திரங்களிலிருந்து, 'ஸ்டர்லிங்' கின் சூத்திரத்தை வருவிக்க.

அதிலிருந்து, n என்பது ஒரு முழு எண்ணானால், மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலைகளுமுள்ள வேறுபாடுகளை நீக்கிவிட்டு

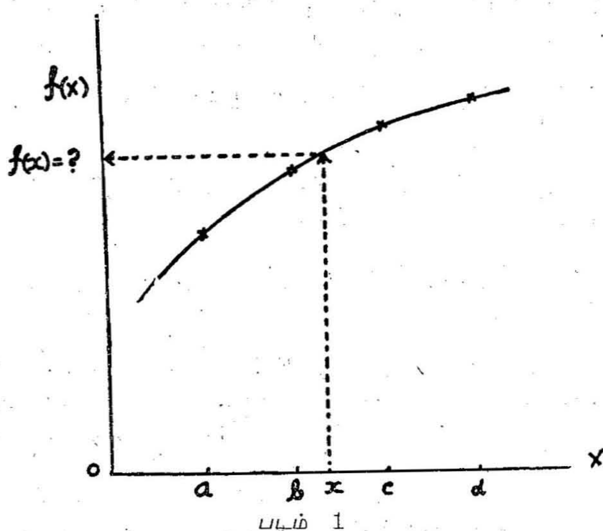
$$f(-x) = \frac{x(x+n)}{2n^2} f(-n) = \frac{x^2 - n^2}{n^2} f(0) + \frac{x(x-n)}{2n^2} f(n)$$

என்று காட்டுக.

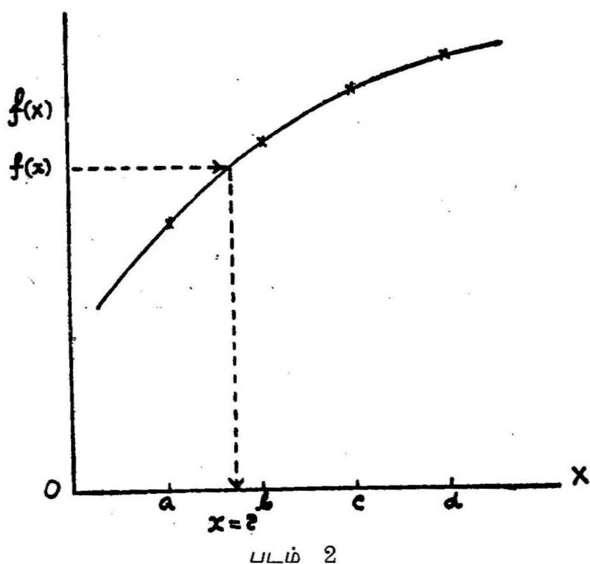
4. எதிர்மார் இடைச் செருகல்

(Inverse Interpolation)

மாறி x-ன் தொடர்ந்த மதிப்புகளும் அவற்றிற்கு உரிய சார்பு $f(x)$–ன் மதிப்புகளும் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், x-ன் இரு மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பிற்கு உரிய $f(x)$-ன் மதிப்பைக் காணும் முறையை 'நேரடி இடைச் செருகல்' (Direct Interpolation) என்கிறோம். ஆனால் 'எதிர்மார் இடைச்செருகல்' (Inverse Interpolation) என்பது இதற்கு நேர் மாறானது. மாறி x–ன் மதிப்புகளும், சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்புகளும் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் சார்பின் இரு மதிப்பு களுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு மதிப்பிற்குரிய மாறியின் மதிப் பைக்காணப் பயன்படுத்தும் முறையை 'எதிர் மார் இடைச் செருகல்' (Inverse Interpolation) என்கிறோம். இவ்விரு முறைகளையும் கீழ்வரும் வரைபடங்கள் விளக்குகின்றன.



படம் 1



படம் 2

நேரடி இடைச் செருகலில் பல முறைகளைப் பயன்படுத்துவதைப் போலவே எதிர்மார் இடைச் செருகலிலும் மூன்று முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். அவையாவன :—

1. 'இலக்ரான்ஜி'ன் சூத்திரம் (எதிர் மாருகப் பயன் படுத்துதல்) (Lagrange's formula used inversely)

2. அடுத்தடுத்த தோராய முறை (Successive Approxi mation)

3. மூன்ரும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறை (Eliminating third order differences)

1. 'இலக்ரான்ஜி'ன் சூத்திரம் (எதிர்மாருகப் பயன் படுத்துதல்).

எதிர்மார் இடைச் செருகலில் $f(x)$-ன் ஒரு மதிப்பிற்கு உரிய x-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம். கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்பை Z என்ற மாறியாகவும், x என்ற மாறியை F (z) என்ற சார்பாகவும் மாற்றிக் கொண்டால் எதிர்மார் இடைச் செருகலின் கணக்கு நேரடி இடைச் செருகலின் அசம இடைவெளிக்கான கணக்காக மாறி விடுகிறது. ஆகையால் இம்

மாதிரியான கணக்குகளுக்கு நாம் நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தையோ அல்லது இலக்ராஞ்ஜின் சூத்திரத்தையோ பயன்படுத்தலாம்.

மாதிரி 1 : இலக்ராஞ்ஜின் சூத்திரத்தை எதிர்மாருகப் பயன்படுத்தி $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தைக் காண்க.

$$f(30) = -30,\ f(34) = -13,\ f(38) = 3,\ f(42) = 18$$

$f(x) = Z$ எனவும் $x = F(z)$ எனவும் கொள்க. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து நாம் F (0)-வின் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

Z	F (z)
−30	30
−13	34
3	38
18	42

இக் கணக்கை ஏற்கனவே இலக்ராஞ்ஜின் விதியைப் பயன்படுத்தி 49–ஆம் பக்கத்தில் போட்டிருக்கிறோம்.

$$\therefore \quad F(0) = 37{\cdot}23$$

அதாவது மூலம் $x = 37{\cdot}23$.

ஆனால் இந்த முறை மிகவும் கடினமானது. ஏனெனில் இதில் $f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்புகளை மாறி Z-ன் மதிப்புகளாக மாற்றியுள்ளோம். அவையாவும் சாதாரணமாக ஐந்து இலக்கங்களுக்கு மேற்பட்டவைகளாக இருக்கும். அதனோடு கூட $f(x)$-ன் மதிப்புகள் எண்ணிக்கையில் அதிகமாகும்போது இக் கணக்கு மேலும் கடினமாகிறது. ஆகையால் இந்த முறையை விட எளிதான கீழ்வரும் இரண்டு முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

2. அடுத்தடுத்த தோராய முறை:

இந்த முறையில் x-ன் மதிப்பைப் படிப்படியாகக் காண்கிரேம். எதிர்மார் இடைச் செருகலில் உள்ள முறைகளில் இந்த முறைதான் மிகவும் எளிதானது. நாம் காணவேண்டிய x-ன் மதிப்பிற்கு அருகில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பை ஆரம்பமாக (origin) மாற்றி, அலகையும் மாற்றி அமைக்கிரேம். பிறகு நியூட்டனின் சூத்திரத்தையோ அல்லது ஏதாவதொரு மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தையோ எழுதிப் படிப்படியாக x-ன் இடைச் செருகின மதிப்பைக் காண்கிரேம்.

ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தைக் கருதுக (Stirling's formula).

$$f(x) = f(0) + x\left[\frac{\triangle f(0) + \triangle f(-1)}{2}\right] + \frac{x^2}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{6}\left[\frac{\triangle^2 f(-1) + \triangle^2 f(-2)}{2}\right] + \ldots\ldots$$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாடுகளின் அட்டவணை அமைப்போம். வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட மேற்கூறிய சூத்திரத்தை

$$f(x) = f(0) + x\,A_1 + x^2\,A_2 + x(x^2-1)\,A_3 + \ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

x-ன் முதல் தோராய மதிப்பை α_1 எனக் கொள்க. இது இரண்டும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலையுள்ள வேறுபாடுகளையும் நீக்கிப் பெறப்பட்டதாகும்.

அதாவது $f(x) = f(0) + \alpha_1 A_1 + 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து α_1-ன் மதிப்பை

$$\alpha_1 = \frac{f(x) - f(0)}{A_1}$$

எனப் பெறுகிரேம்.

x-ன் இரண்டாவது தோராய மதிப்பை α_2 எனக் கொள்க. இது

$$f(x) = f(0) + \alpha_2\,A_1 + \alpha_2(\alpha_1 A_2) + 0$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்பட்டதாகும்.

$$\therefore \quad \alpha_2 = \frac{f(x) - f(0)}{A_1 + \alpha_1 A_2}$$

இதுபோலவே α_3 என்பது x-ன் மூன்ருவது தோராய மதிப்பு என்ருல், இதை

$$f(x) = A_0 + \alpha_3 A_1 + \alpha_3 (\alpha_2 A_2) + \alpha_3 (\alpha_2^2 - 1) A_3$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\alpha_3 = \frac{f(x) - f(0)}{A_1 + \alpha_2 A_2 + (\alpha_2^2 - 1) A_3}$$

எனப் பெறுகிரோம்.

$$\text{இங்கு } A_1 = \left[\frac{\triangle f(0) + \triangle f(-1)}{2}\right]$$

$$A_2 = \frac{\triangle^2 f(-1)}{2}$$

$$A_3 = \left[\frac{\triangle^2 f(-1) + \triangle^2 f(-2)}{12}\right]$$

α_2-ன் மதிப்பைக் காண x-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு α_1-ஐப் பிரதியிட்டும், α_3 ஐக் காண x-ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு α_2 ஐப் பிரதியிட்டும் இருப்பது குறிப்பிடத் தக்கதாகும். ஆகவே முன்னதான X-ன் மதிப்பைக் காண

$X = a + \alpha_3 h$-ஐப் பயன்படுத்துகிரோம். இங்கு a, h என்பன முறையே ஆரம்பமும் (origin) இடைவெளித் தூரமும் ஆகும்.

ஒரே மதிப்பு, α வுக்குத் திரும்பத் திரும்ப வரும்வரை இந்த முறையைத் தொடர்தல் வேண்டும். அதாவது α_2 வும் α_3 யும் தோராயமாகச் சமமானுல் α_3 தான் x-ன் இடைச் செருகின (interpolated value) மதிப்பாகும். மேலும் α_3 க்கு அடுத்த α_4 ஐக் காண வேண்டிய அவசியமில்லை.

மாதிரி 1 : எதிர்மார் இடைச் செருகலைப் பயன்படுத்தி 2-க்கும் 3-க்கும் இடையேயுள்ள மூலத்தை $x^3 - 3x - 7$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 6 தசம இடங்கள் சுத்தமாகக் காண்க.

(ஏப்ரல் 1959)

மூலம் 2-க்கும் 3-க்கும் இடையே உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே X க்கு 2·0, 2·2, 2·4, 2·6, 2·8, 3·0 என்ற மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுக் கீழ்க் கண்ட அட்டவணை அமைக்கப்படுகிறது.

X	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2·0	−2	−5·000			
			2·048		
2·2	−1	−2·952		0·528	
			2·576		0·048
2·4	0	−0·376		0·576	
			3·152		0·048
2·6	1	2·776		0·624	
			3·776		0·048
2·8	2	6·552		0·772	
			4·448		
3·0	3	11·000			

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டில் 0 வுக்கு மிக அருகிலுள்ள மதிப்பு −0·376 க்கு உரிய X-ன் மதிப்பாகிய 2·4 ஐ ஆரம்பமாகக் கொள்வது நல்லது. அதாவது x-ன் மதிப்பைக் காண $x=\dfrac{X-a}{h}$ ஐப் பயன்படுத்துகிறோம்.

'நியூட்டன்–ஸ்டர்லிங்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x)=f(0)+x\left[\frac{\Delta f(0)+\Delta f(-1)}{2}\right]+\frac{x^2}{2!}\Delta^2 f(-1)$$

$$+\frac{x(x^2-1)}{6}\left[\frac{\Delta^3 f(-1)+\Delta^3 f(-2)}{2}\right]+\ldots\ldots$$

$$=f(0)+x\,A_1+x^2\,A_2+x(x^2-1)\,A_3+$$
$$+\ldots\ldots$$

இங்கு $f(x)=0$

A_1, A_2, ... இவற்றின் மதிப்புகளை வேறுபாடுகளின் மூலம் கண்டு, பின்னர் மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$0=-0{\cdot}376+2{\cdot}864\,x+0{\cdot}288\,x^2+0{\cdot}008\,x(x^2-1)+\ldots\ldots$$

என வருகிறது.

ஆகவே x-ன் முதல் தோராய மதிப்பு

$$\alpha_1 = \frac{0\cdot376}{2\cdot864} = 0\cdot13129$$

இரண்டாம் தோராய மதிப்பு

$$\alpha_2 = \frac{0\cdot376}{2\cdot864+\alpha_1\, 0\cdot288}$$

$$= 0\cdot12954$$

மூன்றும் தோராய மதிப்பு

$$\alpha_3 = \frac{0\cdot376}{2\cdot864+\alpha_2\, 0\cdot288+(\alpha_2^2-1)\, 0\cdot008}$$

$$= 0\cdot129949$$

இங்கு α_2 வும் α_3 யும் தோராயமாகச் சமமாக இருக்கின்றன. ஆகவே நமக்குத் தேவையான மூலம்

$$\begin{aligned} X &= a+xh \\ &= a+\alpha_3\, h \\ &= 2\cdot4+0\cdot129949\ (0\cdot2) \\ &= 2\cdot425990 \end{aligned}$$

என்று 6 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கிடைக்கிறது.

3. மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறை (Elimination of third differences)

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறக்குறைய சமமாக இருப்பின் இந்த மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தலாம். $f(x)$ என்ற சார்பு ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாக இருந்தால்தான் இம்முறை சாத்தியமாகும். மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறக்குறைய சமமாக இருப்பின் நான்காம் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறக்குறைய பூச்சியமாக இருக்கும். ஆகையால்தான் மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலையுடைய வேறுபாடுகளை நீக்கியபோதிலும் துரிதமாகத் துல்லியமான விடையைப் பெறுகிறோம். மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் சமமாக இல்லாவிட்டால் இந்த முறை பயன்படாது.

நான்கும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலையுள்ள வேறுபாடுகளை நீக்கிய 'நியூட்டன்–ஸ்டர்லிங்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + x\left[\frac{\triangle f(0) + \triangle f(-1)}{2}\right] + \frac{x^2}{2!}\triangle^2 f(-1)$$

$$+ \binom{x+1}{3}\left[\frac{\triangle^3 f(-1) + \triangle^3 f(-2)}{2}\right]$$

இதே சூத்திரத்தை $f(x)$-ன் அடுத்த மதிப்பிற்கு

$$f(x) = f(1) + (x-1)\left[\frac{\triangle f(1) + \triangle f(0)}{2}\right] + \frac{(x-1)^2}{2!}\triangle^2 f(0)$$

$$+ \binom{x}{3}\frac{[\triangle^3 f(0) + \triangle^3 f(-1)]}{2}$$

என எழுதுகிறோம்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் சுருக்கமாகக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$f(x) = f(0) + xA_1 + x^2A_2 + (x+1)\,x\,(x-1)\,A_3$$

$$f(x) = f(1) + (x-1)\,B_1 + (x-1)^2\,B_2 + x\,(x-1)\,(x-2)\,B_3$$

இங்கு மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் சமமானல்

$$\frac{\triangle^3 f(-1) + \triangle^3 f(-2)}{3!\;2} = \frac{\triangle^3 f(0) + \triangle^3 f(-1)}{3!\;2}$$

அதாவது $\qquad A_3 = B_3$

மேற்கூறிய $f(x)$-க்குரிய இரு சமன்பாடுகளை முறையே $(2-\alpha)$, $(\alpha+1)$ ஆகியவற்ருல் பெருக்கிக் கூட்டுவதன் மூலம் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் உள்ள உறுப்புகளை நீக்கு கிறோம். இங்கு α என்பது x-க்கு பட்டறி முறையால் தோராய மாகக் கண்ட மதிப்பு.

$x = \alpha$ ஆகும்போது

$$-(x+1)\,x\,(x-1)\,(2-\alpha)\,A_3 = (\alpha+1)\,x\,(x-1)\,(x-2)\,B_3$$

எனக் கிடைப்பதால் இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்ட நான் காவது உறுப்பு பூச்சியமாகிறது.

இவ்வாருக $f(x)$ என்ற சார்பு இருபடிச் சமன்பாடாக மாறுகிறது. இதற்கு மூலம் காண்பதின் மூலமாக மாறியின் இடைச் செருகின மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

மாதிரி 2: அலகையும் ஆரம்பத்தையும் மாற்றிய பின் மேற்கண்ட 1-ஆம் கணக்கிற்கு x-ன் தோராய மதிப்பு $\alpha = 0{\cdot}13$ ஆகிறது.

கீழ்க் கண்ட இரு சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம்.

$$(2-\alpha)\, f(x) = (2-\alpha)\, [f(0) + x\, A_1 + x^2\, A_2 + x\,(x^2-1)\, A_3]$$

$$(\alpha+1)\, f(x) = (\alpha+1)\, [f(1) + (x-1)\, B_1 + (x-1)^2\, B_2 + x\,(x-1)\,(x-2)\, B_3]$$

இவற்றில் α, A_1, B_1 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுக் கூட்ட

$$0 = 1{\cdot}87\, [-0{\cdot}376 + 2{\cdot}864\, x + 0{\cdot}288\, x^2] + 1{\cdot}13\, [2{\cdot}776 + 3{\cdot}464\, (x-1) + 0{\cdot}312\, (x-1)^2]$$

அல்லது $0 = 0{\cdot}89112\, x^2 + 8{\cdot}56488\, x - 1{\cdot}128$

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒரு மூலம் $x = 0{\cdot}12995$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே காணவேண்டிய மூலம்

$$X = a + xh = 2{\cdot}4 + 0{\cdot}12995\, (0{\cdot}2)$$

$= 2{\cdot}425990$ என ஆறு தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கிடைக்கிறது.

எதிர்மார் இடைச் செருகலில் $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ என்றால் ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தையும், $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ என்றால் 'பெஸ்ஸலின்' சூத்திரத்தையும் பயன்படுத்துதல் சிறந்தது.

இது போலவே நியூட்டனின் முற்போக்கு சூத்திரத்தைக் கொண்டு எதிர்மார் இடைச் செருகல் கணக்குகளைப் போட அடுத்தடுத்த தோராய முறையையும், மூன்றும் நிலே வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறையையும் பயன்படுத்துகிறோம்.

அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்பு (Successive Approximation) (நியூட்டனின் முற்போக்கு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி.)

X, x என்பனவற்றை முறையே கொடுக்கப்பட்ட மாறி எனவும் ஆரம்பமும் அலகும் மாற்றியபின் கிடைத்த புதிய மாறி எனவும் கொள்க.

ஆகவே $X = a + xh$ என எழுதுகிறோம். அதாவது $0 \leq x \leq 1$ என்றாகிறது.

நியூட்டனின் முற்போக்கு சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(a+xh) = f(a) + \binom{x}{1} \Delta f(a) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots$$

x-ன் முதல் தோராய மதிப்பு α_1 (first approximation)

$$f(a + xh) = f(a) + x \Delta f(a) + 0$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \alpha_1 = \frac{f(a + xh) - f(a)}{\Delta f(a)}$$

அதாவது இரண்டும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலையுள்ள வேறுபாடுகளை நீக்கி α_1-ன் மதிப்பைக் காண்கிறோம்.

இது போலவே மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்ட நிலையுள்ள வேறுபாடுகளை நீக்கி x-ன் இரண்டாம் தோராய மதிப்பு α_2 ஐ

$$f(a + xh) = f(a) + \alpha_2 \Delta f(a) + \tfrac{1}{2} \alpha_2 (\alpha_1 - 1) \Delta^2 f(a)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad \alpha_2 = \frac{f(a + xh) - f(a)}{\Delta f(a) + \frac{1}{2} (\alpha_1 - 1) \Delta^2 f(a)}$$

இவ்வாறு x-ன் அடுத்தடுத்த இரு மதிப்புகள் சமமாக வரும் வரை, இந்த முறையைத் தொடர்கிறோம்.

மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கும் முறை (நியூட்டனின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி):

நியூட்டனின் சூத்திரத்தைக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(a + xh) = E^x f(a) = (1 + \Delta)^x f(a)$$

$$= f(a) + \binom{x}{1} \Delta f(a) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots \quad (1)$$

இதே சூத்திரத்தை $f(x)$-ன் அடுத்த மதிப்பிற்குக் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} f(a + xh) &= E^{x-1} f(a+h) \\ &= (1 + \Delta)^{x-1} f(a + h) \\ &= f(a + h) + \binom{x-1}{1} \Delta f(a + h) \\ &\quad + \binom{x-1}{2} \Delta^2 f(a + h) \\ &\quad + \ldots\ldots + \end{aligned} \quad (2)$$

மூன்றும் நிலை வித்தியாசங்கள் குறைந்தது தோராயமாக வாவது சமமாக இருந்தால்தான் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகளை நீக்கமுடியும்.

(1), (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளை முறையே $(3-\propto)$, $\propto$ ஆகியவற்றுல் பெருக்கிக் கூட்டுவதால் மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் உள்ள உறுப்புகளை நீக்குகிறேம். இங்கு $\propto$ என்பது x-க்குத் தோராயமாகப் பட்டறி முறையால் (trial and error method) கண்ட மதிப்பு.

$x = \propto$ ஆகும் போது

$$-\binom{x}{3}(\propto-3)\,\Delta^3 f(a) = \binom{x-1}{3}\propto\Delta^3 f(a+h)$$

ஏனெனில் $\Delta^3 f(a) = \Delta^3 f(a+h)$

இவ்வாருக $f(x)$ என்ற சார்பு இருபடிச் சமன்பாடாக மாறுகிறது. இதற்குத் தீர்வுகாண்பதன் மூலமாக மாறியின் இடைச் செருகின மதிப்பைக் காண்கிறேம்.

மாதிரி 3 :

கீழ்க் கண்ட அட்டவணையிலிருந்து $y = 100{\cdot}00000$ க்கு உரிய x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	y
1·5	48·09375
1·6	65·53600
1·7	87·69705
1·8	115·47360
1·9	149·86915
2·0	192·00000
2·1	243·10125

கீழ் வரும் வேறுபாட்டு அட்டவணையில் X-ன் ஆரம்பம் (origin) 1·7 என மாற்றப்பட்டுள்ளது.

X	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1·5	−2	48·09375			
			17·44225		
1·6	−1	65·53600		4·71880	
			22·16105		0·8967
1·7	0	87·69705		5·61550	
			27·77655		1·0035
1·8	1	115·47360		6·61900	
			34·39555		1·1163
1·9	2	149·86915		7·73530	
			42·13085		1·2351
2·0	3	192·00000		8·97040	
			51·10125		
2·1	4	243·10125			

$y = f(x)$ எனக் கொள்க.

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = E^x f(0)$$
$$= (1+\Delta)^x f(0)$$
$$= (0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots$$

இதையே கீழ் வருமாறு $f(x)$-ன் அடுத்த மதிப்பிற்கு

$$f(x) = E^{x-1} f(1)$$
$$= (1+\Delta)^{x-1} f(1)$$
$$= f(1) + \binom{x-1}{1} \Delta f(1) + \binom{x-1}{2} \Delta^2 f(1) + \ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

நாம் $f(x) = 100$ க்கு உரிய x-ன் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

இங்கு $x = \dfrac{X - 1{\cdot}7}{0{\cdot}1}$ எனக் கொள்க.

$f(x) = 100$ க்கு உரிய x-ன் மதிப்பைப் பட்டறி முறையால் (trial and error method) $x = 0{\cdot}5$ எனக் காண்கிறோம்.

ஆகையால் $\alpha = 0{\cdot}5$ எனவும்

$(3 - \alpha) = 2{\cdot}5$ எனவும் கொள்க.

வேறுபாட்டட்டவணையிலிருந்து மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் ஏறக்குறைய சமம் எனக் காண்கிறோம். ஆகவே இந்த மூன்றும் நிலை வேறுபாடுகள் நீக்கும் முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். இம்முறைப்படி (1), (2) சமன்பாடுகளை முறையே 2·5 அல்லது 5 ஆலும், 0·5 அல்லது 1 ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டுகிறோம்.

$$600 = 5\left[87{\cdot}69705 + 27{\cdot}77655\,x + \frac{x\,(x-1)}{2}\,6{\cdot}619\right]$$

$$+ 115{\cdot}4736 + (x-1)\,34{\cdot}39555 + \frac{(x-1)\,(x-2)}{2}\,7{\cdot}7353$$

$$= 20{\cdot}41515\,x^2 + 145{\cdot}12785\,x + 527{\cdot}2986$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு கண்டால் மூலம் $x = 0{\cdot}4657$ என்று (நேர் எண்) கிடைக்கிறது. மற்றொரு மூலம் எதிர் எண் (negative) என்பதால் அதைக் கருதுவதில்லை.

$\therefore\ f(x) = 100$-க்கு உரிய X-ன் மதிப்பு

$$X = a + xh = 1{\cdot}7 + 0{\cdot}4657\,(0{\cdot}1)$$

$$= 1{\cdot}74657$$

என்று கிடைக்கிறது.

மாதிரி 4. $x^3 + x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உரிய மெய் மூலத்தை (real root) இரு தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

$$f(x) = x^3 + x - 5 = 0$$

எனக் கொள்க.

பட்டறிமுறையால் (trial and error method) $f(x)$-ன் மெய் மூலம் (real root) 1·5-க்கும் 1·6-க்கும் இடையில் உள்ளது என்று காண்கிறோம்.

ஆகவே X ன் மதிப்பை 1·5, 1·6, 1·7, 1·8 எனக் கொள்க.

$a = 1{\cdot}5$, $h = 0{\cdot}1$ என்பன முறையே ஆரம்பம் எனவும் அலகு எனவும் மாற்றப்பட்டால் $X = a + xh$ என அறிவோம்.

$f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் கீழ் வருமாறு காண்கிறோம்.

X	x^3	$+x$	-5 =	$f(x)$
1·5	3·375	1·5	–5	–0·125
1·6	4·096	1·6	–5	0·696
1·7	4·913	1·7	–5	1·613
1·8	5·832	1·8	–5	2·632

வேறுபாடுகளின் அட்டவணை

X	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1·5	0	–0·125			
			0·821		
1·6	1	0·696		0·096	
			0·917		0·006
1·7	2	1·613		0·102	
			1·019		
1·8	3	2·632			

நியூட்டனின் முற்போக்குச் சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(a+xh) = f(a) + \binom{x}{1} \Delta f(a) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots\ldots$$

இங்கு இந்தக் கணக்கில் $f(a+xh) = 0$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$a = 1{\cdot}5$, $h = 0{\cdot}1$ என்று அறிவோம்.

x-க்கு முதல் தோராய மதிப்பு $0 = -0{\cdot}125 + x\, 0{\cdot}821$ லிருந்த

$$\alpha_1 = \frac{0{\cdot}125}{0{\cdot}821} \text{ எனப் பெறுகிறோம்.}$$

$$\therefore \quad \alpha_1 = 0{\cdot}152$$

இரண்டாவது தோராய மதிப்பு

$$0 = -0{\cdot}125 + x\left[0{\cdot}821 + \frac{\alpha_1 - 1}{2}0{\cdot}096\right] \text{லிருந்து}$$

$$\alpha_2 = \frac{0{\cdot}125}{0{\cdot}7803} = 0{\cdot}1602$$

எனப் பெறுகிறோம்.

மூன்றாம் தோராய மதிப்பு α_3 ஐ

$$0 = -0{\cdot}125 + x\left[0{\cdot}821 + \frac{\alpha_2 - 1}{2}0{\cdot}096 + \frac{(\alpha_2 - 1)(\alpha_2 - 2)}{3!}0{\cdot}006\right]$$

லிருந்து $\alpha_3 = \dfrac{0{\cdot}125}{0{\cdot}8598} = 0{\cdot}1454$ எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே தேவையான மெய் மூலம்

$$X = a + xh = 1{\cdot}5 + 0{\cdot}1454\,(0{\cdot}1) = 1{\cdot}52$$

என்று இரு தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 5 : $x^3 - 6x = 11$ என்ற சமன்பாட்டில் 3-க்கும் 4-க்கும் இடையேயுள்ள ஒரு மூலத்தைக் காண்க.

காணவேண்டிய மூலம் 3-க்கும் 4-க்கும் இடையே உள்ள தால் x-க்கு 3·0, 3·2, 3·4, 3·6. 3·8, 4·0 என்ற மதிப்புகளைப் பிரதி யிட்டு $f(x)$-ன் மதிப்புகளுக்குக் கீழ்க் காணும் வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3·0	− 2·000			
		4·568		
3·2	2·568		0·768	
		5·336		0·048
3·4	7·904		0·816	
		6·152		0·048
3·6	14·056		0·864	
		7·016		0·048
3·8	21·072		0·912	
		7·928		
4·0	29·000			

மூலமானது அட்டவணையில் முதலிரு மதிப்புகளுக்கு இடையே வருவதால், நியூட்டனின் முற்போக்கு விதியைப் பயன்படுத்தி நமக்கு வேண்டிய மதிப்பைப் பெறலாம்.

நியூட்டனின் முற்போக்கு விதியானது

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1} \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots$$

இங்கு $a = 3{\cdot}0 \quad h = 0{\cdot}2 \quad f(x) = 0$

முதல் தோராய மதிப்பு α_1 கீழ்க் கண்டவாறு பெறப்படுகிறது.

$$0 = -\ 2{\cdot}000 + x\ 4{\cdot}568$$

$$\therefore \quad x = \alpha_1 = \frac{2{\cdot}000}{4{\cdot}568} = 0{\cdot}438$$

இரண்டாம் தோராய மதிப்பு α_2

$$0 = -\ 2{\cdot}000 + \alpha_2\ 4{\cdot}568 + \frac{\alpha_2(\alpha_1 - 1)}{2}\ 0{\cdot}768$$

லிருந்து கிடைக்கிறது.

$$\therefore \quad \alpha_2 = \frac{2{\cdot}000}{4{\cdot}3522} = 0{\cdot}4595$$

இது போலவே மூன்றும் தோராய மதிப்பு

$$\alpha_3 = \frac{2{\cdot}000}{4{\cdot}36711} = 0{\cdot}457969$$

எனவே நமக்குத் தேவையான மூலம்

$$X = a + xh = 3{\cdot}0 + 0{\cdot}457969 \times 0{\cdot}2$$
$$= 3{\cdot}091594$$

என்று கிடைக்கிறது.

மாதிரி 6: கீழ்வரும் அட்டவணையில் $4\frac{1}{2}\%$ க்கு (annuities) $\frac{a}{x!}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதிலிருந்து (annuity) 13·00–க்கு உரிய வயதை இரு தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

வயது x	44	45	46	47
$\frac{a}{x!}$	13·40	13·16	12·93	12·68

இங்குக் காணவேண்டிய வயது 45-க்கும் 46-க்கும் இடையே அதாவது அட்டவணையின் நடுவில் உள்ளது. ஆகவே 'ஸ்டர்லிங்கி'–ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

வேறுபாட்டு அட்டவணை

X	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
44	–1	13·40			
			– 0·24		
45	0	13·16		– 0·01	
			– 0·23		– 0·03
46	1	12·93		– 0·02	
			– 0·25		
47	2	12·68			

இவ்வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளை ஸ்டர்லிங்கின் சூத்திரத்தில் மதிப்பிட

$$f(x) = f(0) + x\frac{[\triangle f(0) + \triangle f(-1)]}{2} + \frac{x^2}{2}\triangle^2 f(-1) + \ldots\ldots$$

$$13{\cdot}00 = 13{\cdot}16 - 0{\cdot}235x + 0{\cdot}005x^2$$

முதல் தோராய மதிப்பு α_1 ஐக் காண்க.

$$\alpha_1 = \frac{13{\cdot}00 - 13{\cdot}16}{-0{\cdot}235} = 0{\cdot}68085$$

இது போலவே

இரண்டாம் தோராய மதிப்பை (α_2) க் காண்க.

$$\alpha_2 = \frac{-0{\cdot}16}{-0{\cdot}235 + \alpha_1(0{\cdot}005)}$$

$$= \frac{0{\cdot}16}{0{\cdot}231596}$$

$$= 0{\cdot}69085$$

ஆகவே நாம் காணவேண்டிய மூலம்

$$X = a + xh = 45 + 0{\cdot}69085 \times 1$$

$$= 45{\cdot}69$$

பயிற்சி 4

1. எதிர்மார் இடைச் செருகல் முறையால் $x^3+x-3=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலத்தைக் கணக்கிடுக. (செப். 1960)

2. எதிர்மார் இடைச் செருகல் முறை என்பது என்ன என விளக்குக.

3. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து, $y = 0{\cdot}200$ ஆக இருக்கும் பொழுது, x–ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	y :
0	0·141
0·1	0·158
0·2	0·176
0·3	0·194
0·4	0·213
0·5	0·231
0·6	0·249
0·7	0·268
0·8	0·287

(ஏப்ரல் 1963)

3. $I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ என்பதின் பல மதிப்புகள் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $I(x) = \frac{1}{2}$ என இருக்கும் பொழுது x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	$I(x)$:
0·45	0·475
0·46	0·484
0·47	0·493
0·48	0·502
0·49	0·511
0·50	0·520

(செப். 1961)

4. (*a*) எதிர்மார் இடைச் செருகல் என்பதைப் பற்றி ஒரு சிறு குறிப்பு வரைந்து, இதற்கெனப் பயன்படும் ஏதேனும் இரு முறைகளை விளக்குக.

(*b*) எதிர்மார் இடைச் செருகல் முறையினைக் கொண்டு $\sqrt{2}$-ன் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (ஏப்ரல் 1964)

5. 'எவரெட்'-ன் சூத்திரத்தை எதிர்மார் இடைச் செருகலில் பயன் படுத்த முடியுமா என ஆராய்க.

6. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் 'h' என்பது கடல் மட்டத்திற்கு மேல் உள்ள உயரத்தையும், 'p' என்பது 'பாரமானி'யின் அழுத்தத்தையும் குறிக்கின்றது.

h:	p:
0	30
2753	27
4763	25
6942	23
10593	20

அழுத்தங்கள் 22, 29 ஆக இருக்கும் பொழுது உயரங்களைக் கணக்கிடுக.

குறிப்பு: p-ஐ மாறி எனவும், 'h'-ஐச் சார்பு எனவும் கொண்டு, 'இலக்ராஞ்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தை எதிர் மாருகப் பயன்படுத்தவும். முதலில் சார்பு $F(p)$ யின் அமைப்பைக் கண்டு, பின்பு அதில் p க்கு 22, 29 ஆகிய மதிப்புகளைப் பிரதியிடல் நலம்.

7. $x^3 - 9x - 14 = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு 3 க்கும், 4 க்கும் இடையில் அமைந்துள்ள மூலத்தைக் காண்க.

8. கீழே கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து, $f(x) = 18{\cdot}6$ என இருக்கும் பொழுது x-ன் மதிப்பை எதிர்மார் இடைச் செருகல் மூலம் காண்க.

x	$f(x)$
52	19·2
53	18·9
54	18·5
55	18·2
56	17·9

9. 3-க்கும், 4-க்கும் இடையே அமைந்துள்ள மூலத்தை $x^3 - 6x = 11$ எனும் சமன்பாட்டிற்குக் காண்க.

10. 'இலக்ரான்ஜ்'-ன் சூத்திரத்தை எதிர் மாறுகப் பயன் படுத்தி, $e^{-x} = 0{\cdot}1108$ ஆக இருக்கும்பொழுது x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	e^{-x}
1·0	0·3679
2·0	0·1353
3·0	0·0498
4·0	1·0183

5. இடைவெளிப் பகுப்பும் குறிகளைப் பிரித்தலும்

(Sub-division of Interval and Separation of Symbols)

இடைவெளிப் பகுப்பு.

அநேக கணக்குகளில் மாறியின் ஒவ்வொரு ஐந்தாவது அல்லது பத்தாவது மதிப்புகளுக்கு உரிய சார்பின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு இடைச்செருகல் காண நாம் விழையலாம். மாதிரியாக பிறப்பு இறப்பு பற்றிய புள்ளியியலில் பத்து வருட இடைவெளியில் x வயதுள்ள மக்கட் தொகை, l_x கொடுக்கப்பட்டிருக்கலாம். நாம் x-ன் இடைப்பட்ட ஒரு வருட இடைவெளியுள்ள மதிப்புகளுக்கு மக்கட் தொகை, l_x காண விழையலாம். கீழ்வரும் கணக்கு இதற்கு ஒரு மாதிரியாகும்.

கீழ்வரும் மக்கட் தொகை பட்டியலிலிருந்து 21 வயது முதல் 29 வயது முடிய உள்ள ஒன்பது மக்கட் தொகைகளைக் கணிக்கவும்.

வயது (x)	:	20	30	40	50
மக்கட்தொகை l_x	:	5120	4393	3456	2435

இதற்கு நாம் 'நியூட்டனி'ன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நினைக்கலாம். இங்கு ஒன்பது முறை இதே சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த ஒவ்வொன்றும் ஒரு தனிக்கணக்காவதால் இந்த முறை மிகவும் கடினம். ஆகவே இதைப் பயன் படுத்துதல் நல்லதல்ல, ஆகையால் நாம் கீழ்வரும் ஓர் எளிய முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஐந்தை (quinquennial) அல்லது பத்தை (decennial) இடை வெளியாகக் கொண்ட மாறியின் மதிப்புகள் அடங்கிய அட்டவணையிலிருந்து ஒன்றை இடைவெளியாகக் கொண்ட (unit interval) மதிப்புகளுக்கு உரிய துணை அட்டவணை ஒன்று அமைக்கவேண்டும்.

$\delta f(x)$-ஐ ஒன்றை இடைவெளியாகக் கொண்ட மாறிக்கு உரிய $f(x)$-ன் முதல் வேறுபாடு எனவும், $\Delta f(x)$-ஐ பத்தை இடைவெளியாகக் கொண்ட மாறிக்கு உரிய $f(x)$-ன் முதல் வேறுபாடு எனவும் கொள்க.

பின்னர் $f(x+10) = (1+\delta)^{10} f(x) = (1+\Delta) f(x)$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad (1+\delta)^{10} \equiv 1 + \Delta$$

இதையே

$$1 + \delta \equiv (1+\Delta)^{1/10}$$

அல்லது $\delta \equiv (1+\Delta)^{1/10} - 1$

$$\equiv (1 + 0{\cdot}1\,\Delta - 0{\cdot}045\,\Delta^2 + \ldots\ldots - 1]$$

என எழுதலாம்.

ஆகவே $\delta f(x) = [0{\cdot}1\,\Delta - 0{\cdot}045\Delta^2 + 0{\cdot}0285\,\Delta^3 - \ldots\ldots] f(x)$

இது போலவே

$$\delta^2 f(x) = [0{\cdot}1\,\Delta - 0{\cdot}045\,\Delta^2 + 0{\cdot}0285\,\Delta^3 - \ldots\ldots]^2 f(x)$$
$$= [0{\cdot}01\,\Delta^2 - 0{\cdot}009\,\Delta^3 + 0{\cdot}0077\,\Delta^4 - \ldots\ldots] f(x)$$

எனவும் $\delta^3 f(x) = [0{\cdot}001\,\Delta^3 - 0{\cdot}00135\,\Delta^4] f(x)$ எனவும் எழுதலாம்.

ஆகவே முதற்கண் கொடுக்கப்பட்ட மாறியின் பத்தை இடை வெளியாகக் கொண்ட மதிப்புகளுக்கு உரிய சார்பின் மதிப்புகளுக்கு வேறுபாடுகளின் அட்டவணை அமைக்க வேண்டும். அதில் $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ... கிடைக்கின்றன. இவற்றை $\delta f(x)$, $\delta^2 f(x)$ ... .. களுக்கும் $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ ...... களுக்கும் இடையே உள்ள மேற்கூறிய தொடர்புகளில் பயன்படுத்தி $\delta f(x)$, $\delta^2 f(x)$ ...... ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காணலாம். இவ்வாறு கண்ட ஒன்றை இடை வெளியாகக் கொண்ட மாறிக்கு உரிய வேறுபாடுகளாகிய $\delta f(x)$, $\delta^2 f(x)$,... இவற்றைக் கொண்டு ஒரு துணை அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

இதே முறையில் $\Delta f(x)$ என்பது ஐந்தை இடைவெளியாகக் கொண்ட மாறிக்கு உரிய முதல் வேறுபாடானால், δ-வுக்கும் Δ-வுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் கீழ் வருமாறு காண்கிறோம்.

$$\delta f(x) = (0{\cdot}2 \Delta - 0{\cdot}08 \Delta^2 + 0{\cdot}048 \Delta^3 - \ldots\ldots) f(x)$$

$$\delta^2 f(x) = (0{\cdot}04 \Delta^2 - 0{\cdot}032 \Delta^3 + \ldots\ldots) f(x)$$

$$\delta^3 f(x) = (0{\cdot}008 \Delta^3 - 0. \quad \Delta^4 + \ldots\ldots) f(x)$$

கீழ்வரும் மாதிரிகள் இம்முறையை விளக்குகின்றன.

மாதிரி 1.

கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து $f(1)$ லிருந்து $f(9)$ முடிய உள்ள $f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

x :	0	10	20	30
$f(x)$:	0	0·174	0·347	0·518

$\delta f(x)$ ஐ ஒன்றை இடைவெளியாகக் கொண்ட x-க்கு உரிய சார்பு $f(x)$-ன் முதல் வேறுபாடாகவும் $\Delta f(x)$ ஐ பத்தை இடைவெளியாகக் கொண்ட x-க்கு உரிய சார்பு $f(x)$-ன் முதல் வேறுபாடாகவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட, பத்தை இடைவெளியாகக் கொண்ட, x-க்கு உரிய சார்பு மதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	0			
		0·174		
10	0·174		−0·001	
		0·173		−0·001
20	0·347		−0·002	
		0·171		
30	0·518			

$\Delta f(0),\ \Delta^2 f(0)$ ...... என்ற முதனிலை வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\delta f(0),\ \delta^2 f(0)$ ...... என்ற முதனிலை வேறுபாடுகளைக் காண்கிறோம்.

$$\delta f(0) = 0{\cdot}1\ \Delta f(0) - 0{\cdot}045\ \Delta^2 f(0) + 0{\cdot}0285\ \Delta^3 f(0)$$
$$= 0{\cdot}0174165$$
$$\delta^2 f(0) = 0{\cdot}01\ \Delta^2 f(0) + 0{\cdot}009\ \Delta^3 f(0)$$
$$= -\ 0{\cdot}000001$$
$$\delta^3 f(0) = (0{\cdot}001)\ \Delta^3 f(0)$$
$$= -\ 0{\cdot}000001$$

இவ்வாறு கண்டுபிடித்த முதனிலை வேறுபாடுகளை (leading differences)க் கொண்டு ஒன்றை இடைவெளியாகக் கொண்ட மாறியின் மதிப்புகளுக்கு உரிய தேவையான வேறு பாடுகளின் அட்டவணை கீழ்வருமாறு அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$
0	0·0000000			
		0·0174165		
1	0·0174165		−0·000001	
		0·0174156		−0·000001
2	0·0348320		−0·000002	
		0·0174135		−0·000001
3	0·0522455		−0·000003	
		0·0174105		−0·000001
4	0·0696560		−0·000004	
		0·0174065		−0·000001
5	0·0870625		−0·000005	
		0·0174015		−0·000001
6	0·1044640		−0·000006	
		0·0173955		−0·000001
7	0·1218595		−0·000007	
		0·0173885		−0·000001
8	0·1392480		−0·000008	
		0·0173805		−0·000001
9	0·1566285		−0·000009	
		0·0173715		
10	0·1740000			

மேலே உள்ள அட்டவணையில் $f(0)$ லிருந்து $f(9)$ முடிய உள்ள $f(x)$-ன் ஒன்பது மதிப்புக்கள் ஏழு தசம இடங்களுக்குச்

சுத்தமாகக் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளன. இந்த அட்ட வணையை $x = 10$ க்கு $f(10)$-ன் மதிப்பைச் சரிபார்க்கிறோம்.

மாதிரி 2.

சரியாக x வயது ஆனவர்களின் வாழ்நாளின் எதிர்பார்ப்புகள் (expectations of life) e_x கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 16, 17, 18, 19 வருடங்கள் வாழ்ந்தவர்களின் வாழ்வின் எதிர் பார்ப்புகளைக் காண்க.

வயது x :	15	20	25	30	35
வாழ்நாளின் எதிர் பார்ப்பு (e_x)	54·714	50·197	45·648	41·076	36·498

$\delta f(x)$, $\triangle f(x)$ இவற்றை முறையே ஒன்றையும் ஐந்தையும் இடைவெளிகளாகக் கொண்ட x-க்கு உரிய சார்பு மதிப்புகளின் முதல் வேறுபாடுகளாகக் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட ஐந்தை இடைவெளியாகக் கொண்ட, x-க்கு உரிய சார்பு மதிப்புகளுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு வேறுபாடுகளின் அட்டவணை அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
15	54·714				
		– 4·517			
20	50·197		– 0·032		
		– 4·549		0·009	
25	45·648		– 0·023		0·008
		– 4·572		0·017	
30	41·076		– 0·006		
		– 4·578			
35	36.498.				

$\triangle f(0)$, $\triangle^2 f(0)$, ... என்ற முன்னணி வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\delta f(0)$, $\delta^2 f(0)$ என்ற வேறுபாடுகளைக் கண்டு பிடிக்கிறோம்.

$$\delta f(0) = 0{\cdot}2 \; \Delta f(0) - 0{\cdot}080 \; \Delta^2 f(0) + 0{\cdot}048 \; \Delta^3 f(0)$$
$$= -0{\cdot}90041$$
$$\delta^2 f(0) = 0{\cdot}04 \; \Delta^2 f(0) - 0{\cdot}0326 \; \Delta^3 f(0)$$
$$= 0{\cdot}00157$$
$$\delta^3 f(0) = 0{\cdot}008 \; \Delta^3 f(0)$$
$$= 0{\cdot}00007$$
$$\delta^4 f(0) = 0{\cdot}0016 \; \Delta^4 f(0)$$
$$= 0{\cdot}00001$$

இந்த முன்னணி வேறுபாடுகள் (leading differences) $\delta f(0)$, $\delta^2 f(0)$ ...... ஐக் கொண்டு ஒன்றை இடைவெளியாகக் கொண்ட மாறியின் மதிப்புகளுக்கு உரிய வேறுபாடுகளின் அட்டவணை கீழ் வருமாறு அமைக்கிறோம்.

x	$f(x)$	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$	$\delta^4 f(x)$
15	54·71400				
		– 0·90041			
16	53·81359		– 0·00157		
		– 0·90198		0·00007	
17	52·91161		– 0·00150		0·00001
		– 0·90348		0·00008	
18	52·00813		– 0·00142		0·00001
		– 0·90490		0·00009	
19	51·10323		– 0·00123		
		– 0·90633			
20	50·19700				

மேலே உள்ள அட்டவணையில் $f(16)$ லிருந்து $f(19)$ வரையுள்ள நான்கு மதிப்புகள் $f(x)$-க்கு 5 தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளன. இந்த அட்டவணையை $x = 20$ க்கு அதிகரிப்பதன் மூலம் $f(20)$-ன் மதிப்பைச் சரிபார்க்கிறோம்.

மாதிரி 3 : 'எவரெட்டின்' (Everett's) சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கீழ் வரும் அட்டவணையிலிருந்து log 21, log 22, log 23, log 24 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

X:	10	15	20	25	30	35
log X:	1·0000	1·1761	1·3010	1·3979	1·4771	1·5441

'எவரெட்டின்' சூத்திரத்தை எழுத

$$f(x) = \binom{x}{1} f(1) + \binom{x+1}{3} \Delta^2 f(0) + \binom{x+2}{5} \Delta^4 f(-1) + \ldots$$

$$+ \binom{y}{1} f(0) + \binom{y+1}{3} \Delta^2 f(-1) + \binom{y+2}{5} \Delta^4 f(-2) + \ldots\ldots$$

இங்கு $y = 1 - x$. ஆகவே இதையே

$$f(1+y) = \binom{y}{1} f(2) + \binom{y+1}{3} \Delta^2 f(1) + \binom{y+2}{5} \Delta^4 f(0) + \ldots$$

$$+ \binom{x}{1} f(1) + \binom{x+1}{3} \Delta^2 f(0) + \binom{x+2}{5} \Delta^4 f(-1) + \ldots\ldots$$

எனவும் எழுதலாம்.

மேலே உள்ள இரு சமன்பாடுகளிலும் உள்ள x-ன் உறுப்புக்கள் சமமாக உள்ளன.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட வேறுபாடுகளின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	log X	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
10	1·0000				
		0·1761			
15	1·1761		– 0·0512		
		0·1249		0·0232	
20	1·3010		– 0·0280		– 0·0129
		0·0969		0·0103	
25	1·3979		– 0·0177		– 0·0048
		0·0792		0·0055	
30	1·4771		– 0·0122		
		0·0670			
35	1·5441				

கொடுக்கப்பட்ட மாறி X எனக் கொண்டால் புது மாறி $x = \frac{X-20}{5}$ ஆகும். நமக்குத் தேவையான X-ன் மதிப்பு (21, 22, 23, 24) களுக்கு உரிய x-ன் மதிப்புகள் 0-க்கும் 1-க்கும்

இடையில் உள்ளன. இதையே

X:	20	21	22	23	24	25
x:	0	0·2	0·4	0·6	0·8	1·0

என எழுதலாம்.

இங்கு $x+y=1$ எனக் கொண்டால், x, y இவற்றின் மதிப்புகளை வரிசையாக

x:	0·2	0·4	0·6	0·8
y:	0·8	0·6	0·4	0·2

என எழுதலாம்.

f (0·2)-ன் முதல் வரிசையானது f (1·8)-ன் இரண்டாம் வரிசையாக, ஆனால் அதே சமயத்தில் அதற்கு நேர்மாறான வரிசையாக இருக்கும். கீழ் வரும் அட்டவணையின் ஆறும் வரிசையின் மதிப்புகளைக் காண இத்தன்மையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

கீழ் வரும் அட்டவணை முதலில் X=15 என்றும், பிறகு X=20 என்றும் ஆரம்பங்களாகக் கொண்டு x-ன் 0·2, 0·4, 0·6, 0·8 மதிப்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

x	$x\,f(1)$	$\binom{x+1}{3}\Delta^2 f(0)$	$\binom{x+2}{5}\Delta^4 f(-1)$	II + III + IV	V in the reverse order	Interpolated value
I	II	III	IV	V	VI	V + VI
0·2	0·26020	0·00090	− 0·00008	0·26102		
0·4	0·52040	0·00157	− 0·00014	0·52183		
0·6	0·78060	0·00179	− 0·00015	0·78224		
0·8	1·04080	0·00134	− 0·00010	1·04204		
0·2	0·27958	0·00057	− 0·00003	0·28012	1·04204	1·32216
0·4	0·55916	0·00099	− 0·00005	0·56010	0·78224	1·34234
0·6	0·83874	0·00113	− 0·00006	0·83981	0·52183	1·36164
0·8	1·11832	0·00085	− 0·00004	1·11913	0·26102	1·38015

இவ்வாருக

X:	21	22	23	24
log X:	1·32216	1·34234	1·36164	1·38015

எனப் பெறுகிறோம்.

இவைகளின் உண்மையான அட்டவணை மதிப்புகளாவன

1·3222   1·3424   1·3617   1·3802

குறிகளைப் பிரித்தல் (Separation of Symbols):

இடைச் செருகலில் வரும் அநேக கணக்குகளில் சார்பு $f(x)$-ம் அதன் வேறுபாடுகளும், $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, ... அடங்கிய ஒரு கூட்டுத் தொகையை நாம் காண வேண்டியிருக்கும். அல்லது செயலிகள் E க்கும் Δ வுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புபோல் அநேக தொடர்புகளை நிறுவ வேண்டியிருக்கும். இத் தொடர்பைக் காண நாம்

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ என எழுதுகிறோம்.

மேலும் $E f(x) = f(x+h)$ என அறிவோம்.

முதல் சமன்பாட்டில் $f(x+h)$-க்குப் பதிலாக $E f(x)$-ஐ எழுத

$$\Delta f(x) = E f(x) - f(x) \text{ என வரும்.}$$

இதில் $f(x)$-ஐ E லிருந்தும் (-1) லிருந்தும் பிரித்து எழுத

$$\Delta f(x) = (E-1) f(x) \text{ என வரும்.}$$

பின்னர் Δ, E என்ற செயலிகளை $f(x)$ லிருந்து தனிப்படுத்த

$$\Delta \equiv (E-1) \text{ என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது.}$$

இத்தொடர்பை நிறுவ நாம் குறிகளைச் சார்பிலிருந்து பிரித்து அக்குறிகள் மட்டும் அடங்கிய ஓர் அமைப்பைக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு சார்பிலிருந்து குறிகளை எல்லாம் தனிப்படுத்தி அவைகளை ஒரு சேரக் காணும் முறைதான் குறிகளைப்பிரித்தல் (separation of symbols) எனப்படும். சார்புடன் இல்லாக் குறிகளுக்குப் பொருள் இல்லையாகையால் இக் குறிகளைப் பிரித்தல் என்பது ஒரு தற்காலிக அமைப்பே என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

இக்குறிப்பைத் தெளிவாக்கவும் இதன் பயனை விளக்கவும் கீழ் வரும் மாதிரிகள் பயன்படும்.

மாதிரி 1.

$$f(x+n) = f(n) + \binom{x}{1} \triangle f(n-1) + \binom{x+1}{2} \triangle^2 f(n-2) + \ldots\ldots$$

என நிரூபிக்க.

$f(x+n) = E^n f(x)$ or $E^x f(n)$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad f(x+n) = \left(\left(\frac{1}{E}\right)^{-x} f(n)\right)$$

$$= \frac{1^{-x}}{E^{-x}} f(n)$$

$$= \frac{(E - \triangle)^{-x}}{E^{-x}} f(n)$$

$$(\because \quad 1 + \triangle \equiv E)$$

$$= \left(1 - \frac{\triangle}{E}\right)^{-x} f(n)$$

$$= \left[1 + \binom{x}{1} \triangle E^{-1} + \binom{x+1}{2} (\triangle E^{-1})^2 + \binom{x+2}{3} (\triangle E^{-1})^3 + \ldots\ldots\right] f(n)$$

$$= f(n) + \binom{x}{1} \triangle f(n-1) + \binom{x+1}{2} \triangle^2 f(n-2) + \binom{x+2}{3} \triangle^3 f(n-3) + \ldots\ldots$$

மாதிரி 2.

$$f(0) + f(1) \frac{x}{1!} + f(2) \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$= e^x \left[f(0) + x \triangle f(0) + \frac{x^2}{2!} \triangle^2 f(0) + \ldots\ldots \right]$$

என நிரூபிக்க.

$E^n f(x) = f(x+n)$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad f(0) + f(1)\frac{x}{1!} + f(2)\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$= f(0) + \mathrm{E}f(0)\frac{x}{1!} + \mathrm{E}^2 f(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

$$= \left[1 + \frac{\mathrm{E}x}{1!} + \frac{\mathrm{E}^2x^2}{2!} + \ldots\ldots\right] f(0)$$

குறிகளைப் பிரிக்கும் முறையைப் பயன்படுத்த

$$= e^{\mathrm{E}x} f(0)$$

$$= e^{(1+\triangle)x} f(0)$$

$$= e^{x} e^{\triangle x} f(0)$$

$$= e^x \left[1 + \frac{\triangle x}{1!} + \frac{(\triangle x)^2}{2!} + \ldots\ldots\right] f(0)$$

$$= e^x \left[f(0) + \frac{x}{1!}\triangle f(0) + \frac{x^2}{2!}\triangle^2 f(0) + \ldots\ldots\right]$$

மாதிரி 3.

$$u_x - \frac{1}{8}\triangle^2 u_{x-1} + \frac{1.3}{8.16}\triangle^4 u_{x-2} + \ldots\ldots$$

$$= u_{x+1/2} - \frac{1}{2}\triangle u_{x+1/2} + \frac{1}{4}\triangle^2 u_{x+1/2} - \frac{1}{8}\triangle^3 u_{x+1/2} + \ldots\ldots$$

எனக் காட்டுக.

$u_x = f(x)$ எனக் கொள்க.

$f(x-n) = \mathrm{E}^{-n} f(x)$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad f(x) - \frac{1}{8}\triangle^2 f(x-1) + \frac{1.3}{8.16}\triangle^4 f(x-2) + \ldots\ldots$$

$$= f(x) - \frac{1}{8}\triangle^2 \mathrm{E}^{-1} f(x) + \frac{1.3}{8.16}\triangle^4 \mathrm{E}^{-2} f(x) + \ldots\ldots$$

$$= \left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\triangle^2}{\mathrm{E}}\right) + \frac{1.3}{8.16}\left(\frac{\triangle^4}{\mathrm{E}^2}\right) - \ldots\ldots\right] f(x)$$

$$= \left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1\,!}\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right) + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}{2\,!}\left(\frac{\triangle^2}{4E}\right)^2 - \ldots\ldots\right] f(x)$$

$$= \left(1 + \frac{\triangle^2}{4E}\right)^{-1/2} f(x)$$

$$= \left(\frac{4E + \triangle^2}{4E}\right)^{-1/2} f(x)$$

$$= 2E^{1/2}\,[\,4\,(1 + \triangle) + \triangle^2\,]^{-1/2} f(x)$$

$$= 2E^{1/2}\,[\,(2 + \triangle)^2\,]^{-1/2} f(x)$$

$$= \frac{2}{2 + \triangle} f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\triangle}{2}\right)^{-1} f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[1 - \frac{\triangle}{2} + \frac{\triangle^2}{4} - \frac{\triangle^3}{8} + \ldots\ldots\right] f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\triangle f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\triangle^2 f\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\triangle^3 f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots$$

மாதிரி 4.

$$f(1)\,x + f(2)\,x^2 + f(3)\,x^3 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{x}{1-x} f(1) + \frac{x^2}{(1-x)^2}\triangle f(1) + \frac{x^3}{(1-x)^3}\triangle^2 f(1) + \ldots..$$

என நிரூபிக்க.

$f(x+n) = E^n f(x)$ என அறிவோம்.

$$\therefore\quad f(1)\,x + f(2)\,x^2 + f(3)\,x^3 + \ldots\ldots$$

$$= f(1)\,x + Ef(1)\,x^2 + E^2 f(1)\,x^3 + \ldots\ldots$$

$$= x\,[\,1 + Ex + E^2x^2 + \ldots\ldots\,]\,f(1)$$

$$= x\,[\,1 - Ex\,]^{-1} f(1)$$

$$= x\,[\,1 - (1 + \triangle)\,x\,]^{-1} f(1)$$

$$= x\,[(1-x) - \triangle x\,]^{-1} f(1)$$

$$= x\,\frac{x}{1-x}\left[1 - \frac{\triangle x}{1-x}\right]^{-1} f(1)$$

$$= \frac{x}{1-x}\left[1 + \frac{\triangle x}{1-x} + \frac{\triangle^2 x^2}{(1-x)^2} + \ldots\ldots\right] f(1)$$

$$= \frac{x}{1-x} f(1) + \frac{x^2}{(1-x)^2} \triangle f(1)$$

$$+ \frac{x^3}{(1-x)^3} \triangle^2 f(1) + \ldots\ldots$$

மாதிரி 5.

மூன்ரும் நிலை வித்தியாசங்கள் வரை கருதி

$$f(4) = f(0) + 4\triangle f(0) + 6\triangle^2 f(-1) + 10\triangle^3 f(-1)$$

என நிரூபிக்க.

$f(x+n) = E^n f(x)$ என அறிவோம்.

$$\therefore\ f(4) = E^4 f(0)$$

$$= (1+\triangle)^4 f(0)$$

$$= [1 + 4\triangle + 6\triangle^2 + 4\triangle^3 + \triangle^4] f(0)$$

$$= f(0) + 4\triangle f(0) + (6\triangle^2 + 4\triangle^3 + \triangle^4) f(0)$$

$$= f(0) + 4\triangle f(0) + (6\triangle^2 + 4\triangle^3 + \triangle^4) E f(-1)$$

$$= f(0) + 4\triangle f(0) + (6\triangle^2 + 4\triangle^3 + \triangle^4)(1+\triangle) f(-1)$$

$$= f(0) + 4\triangle f(0) + 6\triangle^2 f(-1) + 4\triangle^3 f(-1)$$

$$+ \triangle^4 f(-1) + 6\triangle^3 f(-1) + 4\triangle^4 f(-1)$$

$$+ \triangle^5 f(-1)$$

$$= f(0) + 4\triangle f(0) + 6\triangle^2 f(-1) + 10\triangle^3 f(-1)$$

$+0$ மூன்ரும் நிலை வித்தியாசங்கள் வரைகருத.

மாதிரி 6.

$$f(4) = f(3) + \triangle f(2) + \triangle^2 f(1) + \triangle^3 f(1)$$

என நிரூபிக்க.

(செப்டம்பர் 1961)

$f(4) - \triangle^3 f(1)$ ஐக் கருதுவோம்.

$$f(4) - \triangle^3 f(1) = f(4) - \triangle^3 E^{-3} f(4)$$
$$= [1 - \triangle^3 E^{-3}] f(4)$$
$$= E^{-3} [E^3 - \triangle^3] f(4)$$
$$= E^{-3} \left[\frac{E^3 - \triangle^3}{E - \triangle}\right] f(4)$$
$$(\because \quad E - \triangle = 1)$$
$$= E^{-3} [E^2 + E\triangle + \triangle^2] f(4)$$
$$= [E^{-1} + E^{-2} \triangle + E^{-3} \triangle^2] f(4)$$
$$= f(3) + \triangle f(2) + \triangle^2 f(1)$$
$$\therefore \quad f(4) = f(3) + \triangle f(2) + \triangle^2 f(1) + \triangle^3 f(1)$$

மாதிரி 7.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ என்றால்

$$f(2x) - \binom{x}{1} 2 f(2x-1) + \binom{x}{2} 2^2 f(2x-2) \ldots\ldots (-2)^x f(x)$$
$$= (-1)^x (c - 2ax)$$

என நிரூபிக்க.

$f(x-n) = E^{-n} f(x)$ என அறிவோம்.

ஆகவே

$$f(2x) - \binom{x}{1} 2 f(2x-1) + \binom{x}{2} 2^2 f(2x-2) - \ldots\ldots (-2)^x f(x)$$
$$= f(2x) - \binom{x}{1} 2 E^{-1} f(2x) + \binom{x}{2} 2^2 E^{-2} f(2x) - \ldots\ldots$$
$$(-2)^x E^{-x} f(2x)$$
$$= \left[1 - \binom{x}{1}\left(\frac{2}{E}\right) + \binom{x}{2}\left(\frac{2}{E}\right)^2 - \ldots\ldots\right.$$
$$\left.(-1)^x \left(\frac{2}{E}\right)^x\right] f(2x)$$
$$= \left(1 - \frac{2}{E}\right)^x f(2x)$$

$$= (E-2)^x \, E^{-x} f(2x)$$
$$= [1+\Delta-2]^x f(x)$$
$$= (-1)^x (1-\Delta)^x f(x)$$
$$= (-1)^x \left[1 - \binom{x}{1}\Delta + \binom{x}{2}\Delta^2 - \binom{x}{3}\Delta^3 + \dots\dots\right] f(x)$$
$$= (-1)^x \left[f(x) - \binom{x}{1}\Delta f(x) + \binom{x}{2}\Delta^2 f(x) - \dots\dots (-1)^x \Delta^x f(x)\right] \qquad \text{I}$$

இங்கு $f(x) = ax^2 + bx + c$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இது இருபடிக் கோவையாக இருப்பதால் இதனுடைய மூன்ரும் நிலை வித்தியாசங்கள் பூச்சியமாகும்.

எனவே

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$
$$= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c$$
$$= 2ax + a + b$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$$
$$= 2a(x+1) + a + b - 2ax - a - b$$
$$= 2a$$
$$\Delta^3 f(x) = 0$$

இம்மதிப்புகளை I ல் பிரதியிட

$$f(2x) - \binom{x}{1} 2 f(2x-1) + \binom{x}{2} 2^2 f(2x-2) - \dots\dots (-2)^x f(x)$$
$$= (-1)^x \left[ax^2 + bx + c - \binom{x}{1}(2ax + a + b) + \binom{x}{2}(2a) + 0\right]$$

$$= (-1)^x \,[ax^2 + bx + c - 2ax^2 - ax - bx + ax^2 - ax]$$
$$= (-1)^x \,(c - 2ax)$$

மாதிரி 8.

$$\triangle x^m - \tfrac{1}{2} \triangle^2 x^m + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \triangle^3 x^m - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$ m உறுப்புகள் வரை உள்ள தொடரின் மதிப்பு காண்க.

(ஏப்ரல் 1968)

$$\triangle x^m - \tfrac{1}{2} \triangle^2 x^m + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \triangle^2 x^m - \ldots\ldots \; m \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \triangle \left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1\,!} \triangle + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2\,!} \triangle^2 - \ldots\ldots\right] x^m \qquad \text{I}$$

$\triangle^{m+1} x^m = 0$ என்பதால் மேலேயுள்ள தொடர் ஒரு முடிவிலாத் தொடராகும்.

$$\therefore \quad \triangle x^m - \tfrac{1}{2} \triangle^2 x^m + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \triangle^3 x^m - \ldots\ldots \; m \text{ உறுப்புகள்}$$

$$= \triangle \,[1 + \triangle]^{-1/2} \, x^m$$
$$= \triangle \, E^{-1/2} \, x^m \qquad (\because \; 1 + \triangle \equiv E)$$
$$= \triangle \, (x - \tfrac{1}{2})^m$$
$$= (x + \tfrac{1}{2})^m - (x - \tfrac{1}{2})^m$$

மாதிரி 9:

$$2\,[\,f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \ldots\ldots]$$
$$= f\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \triangle^2 f\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \triangle^4 f\left(x - \frac{5}{2}\right) - \ldots\ldots$$

என நிரூபிக்க.

$$f\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} \triangle^2 f\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \triangle^4 f\left(x - \frac{5}{2}\right) - \ldots\ldots$$

$$= E^{-1/2} f(x) - \frac{1}{8} \triangle^2 E^{-3/2} f(x) + \frac{1 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \triangle^4 E^{-5/2} f(x) - \ldots\ldots$$

$$= E^{-1/2}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{\Delta^2}{4E}\right)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{\Delta^2}{4E}\right)^2-\ldots\ldots\right]f(x)$$

$$= E^{-1/2}\left[1+\frac{\Delta^2}{4E}\right]^{-1/2}f(x)$$

$$= E^{-1/2}(4E)^{1/2}(4E+\Delta^2)^{-1/2}f(x)$$

$$= 2\,(4E+E^2+1-2E)^{-1/2}f(x)$$

$$= 2\,(E+1)^{-1}f(x)$$

$$= 2\,[1-E+E^2-E^3+\ldots\ldots]\,f(x)$$

$$= 2\,[f(x)-f(x+1)+f(x+2)-f(x+3)+\ldots\ldots]$$

பயிற்சி 5

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாழ் நாள் அட்டவணையிலிருந்து, 21 முதல் 29 வரையுள்ள எல்லா வயதிலும் வாழ்கின்றவர்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

வயது x	வாழ்பவர்களின் எண்ணிக்கை l_x
20	5120
30	4393
40	3456
50	2435

(2) 400, 410, 420, 430, 440 ஆகிய எண்களின் மடக்கைகள், ஐந்து தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளிலிருந்து, 400 க்கும், 410 க்கும் இடையிலுள்ள எல்லா முழு எண்களின் மடக்கைகளேயும் காண்க.

x	$\log x$
400	2·60206
410	2·61278
420	2·62325
430	2·63347
440	2·64345

(3) கீழ்க் காணும் அட்டவணையில் இறப்புவீத வேகங்கள் (μx) [Force of Mortality] கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பத்து வருட இடைவெளிகளுக்கான இடைவெளிப் பகுப்பு முறையால் 81 முதல் 89 முடிய வயதானவர்களின் இறப்பு வீத வேகத்தை (μx)க் கணக்கிடுக.

அடைந்த வயது x	μx
70	0·04972
80	0·11967
90	0·27854
100	0·75429
110	10·92976

(4) ஒரு இன்ஷ்யூரன்ஸின் 2% இறுதி மதிப்புகள் (Ax) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24} ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

வயது x	A_x
20	0·37867
25	0·41226
30	0·44943
35	0·49032

(5) $$\Delta^n f(x-n) = f(x) - \binom{n}{1} f(x-1) + \binom{n}{2} f(x-2) - \ldots\ldots$$

என நிரூபிக்க.

(6) $$f(x) - f(x+1) + f(x+2) - f(x+3) + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\left[f\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\Delta^2 f\left(x-\frac{3}{2}\right) + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \Delta^4 f\left(x-\frac{5}{2}\right)\ldots\ldots\right]$$

என நிரூபிக்க.

(7) ஐந்து வருட இடைவெளிக்கான இடைவெளிப் பகுப்பு முறையின் துணை கொண்டு, கீழ் வரும் அட்டவணையிலிருந்து 0-க்கும் 5-க்கும் இடைப்பட்ட மாறி x-ன் மதிப்புகளுக்குரிய சார்பின் மதிப்புகள் எல்லாவற்றையும் கணக்கிடுக.

x	$f(x)$
0	55
5	82
10	175
15	202
20	264

(8) $f(0) + f(1) + \ldots\ldots + f(n)$

$$= \binom{n+1}{1} f(0) + \binom{n+1}{2} \Delta f(0) + \binom{n+1}{3} \Delta^2 f(0) + \ldots\ldots + \Delta^n f(0)$$

என நிரூபிக்க.

(9) $f(x) = f(x-1) + \Delta f(x-2) + \Delta^2 f(x-3) + \ldots\ldots + \Delta^n f(x-n)$

எனக் காட்டுக.

(10) இடைவெளி 1 என இருக்கும்பொழுது முதல் நிலை வேறுபாட்டை $\delta f(x)$-ம், இடைவெளி 5 ஆக இருக்கும் பொழுது முதல் நிலை வேறுபாட்டை $\Delta f(x)$ ம் குறித்தால், $\delta f(0)$, $\delta^2 f(0)$, $\delta^3 f(0)$ ஆகியவைகளை Δ-க்களில் கண்டு பிடிக்கவும்.

6. காரணீயப் பெருக்கின் குறியீடும் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளும்

(Factorial Notation and Differences of Zero)

காரணீயப் பெருக்கின் குறியீடு (Factorial Notation)

இடைச் செருகல் இயலில் கீழ் வருவன போன்ற சில m காரணிகளின் பெருக்கலைக் கருதவேண்டியிருக்கிறது.

$$x(x-h)(x-2h)\ \ldots\ldots\ (x-\overline{m-1}\,h)$$

இதையே

$x^{(m)} = x(x-h)(x-2h)\ \ldots\ldots\ (x-\overline{m-1}\,h)$ என்ற காரணீயப் பெருக்கின் குறியீட்டால் சுருக்கமாக எழுதலாம். இங்கு h என்பது சம இடைவெளி தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பாக $h=1$ என்றால்

$$x^{(m)} = x(x-1)(x-2)\ \ldots\ldots\ (x-m+1)$$

$x^{(m)}$-ன் அடுத்த வேறுபாடுகளைக் கருதுவோம்.

$$\begin{aligned}\triangle x^{(m)} &= (x+1)\,x\,(x-1)\ \ldots\ldots\ (x-m+2)\\ &\quad -x(x-1)\ \ldots\ldots\ (x-m+1)\\ &= (x-1)\ \ldots\ldots\ (x-m+2)\,[x+1-x+m-1]\\ &= m\,x^{(m-1)}\end{aligned}$$

இது போலவே

$$\triangle^2 x^{(m)} = m(m-1)\,x^{(m-2)}$$

$$\therefore\quad \triangle^m x^{(m)} = m!$$

$$\Delta^{m+1} x^{(m)} = 0 \qquad (\because x^{(0)} = 1)$$

$x^{(m)} = x^{(m-1)}(x-m+1)$ என அறிவோம்.

இங்கு $m = 0$ எனப் பிரதியிட

$$x^{(0)} = x^{(-1)}(x+1)$$

அல்லது $x^{(-1)} = \dfrac{1}{x+1}$

$m = -1$ எனப் பிரதியிட

$$x^{(-1)} = x^{(-2)}(x+2)$$

அல்லது $x^{(-2)} = \dfrac{x^{(-1)}}{x+2}$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

ஆகவே பொதுவாக

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+m)}$$

$$= \frac{1}{(x+m)^{(m)}}$$

என எழுதலாம்.

$x^{(-m)}$-ன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கருதுக.

$$\Delta x^{(-m)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+m)}$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}\left[\frac{1}{x+m+1} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+m)}\left[\frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+m+1)(x+1)}\right]$$

$$= (-m)\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+m+1)}$$

$$= (-m)\frac{1}{(x+m+1)^{(m+1)}}$$

$$\therefore \Delta x^{(-m)} = (-m)\, x^{(-\overline{m+1})}$$

இது போலவே

$$\triangle^2 x^{(-m)} = m\,(m+1)\, x^{(-\overline{m+2})}$$

$x^{(-m)}$-க்கு வேறுபாடு காண்பதன் மூலமாக நாம் அதன் பகுதி (denominator) யின் படியை (degree) அதிகரிப்பதால் $\triangle^m x^{(-m)}$ ஒரு மாறிலி அல்ல என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

x-ன் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணீயப் பெருக்கு அமைப்பில் எழுதலாம்.

$f_n\,(a+xh)$ ஐ x என்ற மாறியின் n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை எனக்கொள்க. இதில் h என்பது சம இடை வெளித்தூரம்.

இந்த n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையை x ஆல் வகுக்க $(n-1)$ ஆம்படிக் கோவை கிடைக்கும். மீதியை A_0 எனக் கொண்டால்

$$f_n\,(a+xh) = A_0 + x^{(1)}\, f_{n-1}\,(a+xh)$$

இதுபோலவே படிப்படியாக $(x-1)$, $(x-2)$, ... இவை களால் வகுக்க.

$$f_n\,(a+xh) = A_0 + A_1\, x^{(1)} + A_2\, x^{(2)} + \ldots\ldots + A_n\, x^{(n)}$$

ஆகையால் A_0, A_1 ...... A_n

ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் தெரிந்தால் n–ஆம்படிக் கோவையைக் காரணீயப் பெருக்கின் அமைப்பில் எழுதலாம். இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண $f_n\,(a+xh)$ –ன் வேறுபாடு களைக் காண்க.

$$\triangle f\,(a+xh) = A_1 + 2\,A_2\, x^{(1)} + 3\,A_3\, x^{(2)} + \ldots\ldots + n\,A_n\, x^{(n-1)}$$

$$\triangle^2 f\,(a+xh) = 2\,A_2 + 6\,A_3\, x^{(1)} + \ldots\ldots + n\,(n-1)\,A_n\, x^{(n-2)}$$

இதுபோலவே

$$\triangle^n f\,(a+xh) = n!\; A_n\, x^{(0)} = n!\; A_n$$

இச்சமன்பாடுகளில் $x = o$ எனப்பிரதியிட

$$A_0 = f\,(a),\ A_1 = \triangle f\,(a),\ 2\,!A_2 = \triangle^2 f\,(a) \ \ldots\ldots\ n\,!\ A_n = \triangle^n f\,(a)$$

ஆகவே பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணீயப் பெருக்கின் அமைப்பில்

$$f(a+xh) = f(a) + x^{(1)} \triangle f(a) + \frac{x^{(2)}}{2!} \triangle^2 f(a) + \ldots\ldots + \frac{x^{(n)}}{n!} \triangle^n f(a)$$

என எழுதலாம்.

மாதிரி 1.

$(9x^2+3)$ ஐ முதல் வேறுபாடாகக் கொண்ட சார்பைக் காண்க.

$\triangle x^{(m)} = m\, x^{(m-1)}$ என அறிவோம்.

அதாவது $x^{(m-1)} = \dfrac{\triangle x^{(m)}}{m}$

$$= \triangle \left[\frac{x^{(m)}}{m}\right] \qquad 1$$

இங்கு $\triangle f(x) = 9x^2 + 3$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

நாம் $f(x)$ ஐக் காண வேண்டும். $f(x)$ ஐக் காண $(9x^2+3)$ ஐக் காரணீயப் பெருக்கின் அமைப்பில் எழுத வேண்டும்.

$$9x^2 + 3 = A\,x(x-1) + B\,x + C$$

எனக் கொள்க.

$x = 0$ எனப் பிரதியிட $C = 3$ எனவும்

$x = 1$ எனப் பிரதியிட $B + C = 12$

அல்லது $B = 9$ எனவும் ஆகின்றன.

இரு பக்கங்களிலும் x^2 -ன் குணகங்களையும் பொருத்திப் பார்க்க $A = 9$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore\ 9x^2 + 3 = A\,x^{(2)} + B\,x^{(1)} + C$$
$$= 9x^{(2)} + 9x^{(1)} + 3$$

ஆகவே சமன்பாடு – (1)–ன் படி

$$9x^{(2)} + 9x^{(1)} + 3 = \triangle f(x)$$

அதாவது $f(x) = 9\frac{x^{(3)}}{(3)} + \frac{9\,x^{(2)}}{2} + \frac{3\,x^{(1)}}{1} + D$

$$= 3\,x^{(3)} + 4{\cdot}5\,x^{(2)} + 3\,x^{(1)} + D$$

இங்கு D என்பது ஒரு மாறிலி யாகும்.

மாதிரி 2.

$x^4 - 12\,x^3 + 42\,x^2 - 30\,x + 9$ என்ற சார்பினைக் காரணீயப் பெருக்கின் அமைப்பில் எழுதுக. பின்னர் அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் காண்க. (செப்டம்பர் 1963)

$$x^4 - 12\,x^3 + 42\,x^2 - 30\,x + 9 = A\,x^{(4)} + B\,x^{(3)} + C\,x^{(2)} + D\,x^{(1)} + E$$

எனக் கொள்க.

$$\therefore x^4 - 12\,x^3 + 42\,x^2 - 30\,x + 9 = A\,x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) + B\,(x)\,(x-1)\,(x-2) + C\,x\,(x-1) + D\,x + E$$

A, B, C, D, E என்ற மாறிலிகளைக் காண x-ன் மதிப்புகளை 0, 1, 2, 3, எனப் பிரதியிடுகிறோம்.

$x=0$ என்றால் $E=9$

$x=1$,, $10=D+E$

$x=2$,, $37=2\,C+2D+E$

$x=3$,, $54=6\,B+6\,C+3\,D+E$

மேற்கண்ட நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்தும்

$$E = 9$$

$$D = 1$$

$$C = 13$$

$$B = -6$$

எனப் பெறுகிறோம்.

x^4 -ன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$A = 1$$

ஆகவே இவைகளைப் பிரதியிட

$$x^4 - 12\,x^3 + 42\,x^2 - 30\,x + 9$$
$$= A\,x^{(4)} + B\,x^{(3)} + C\,x^{(2)} + D\,x^{(1)} + E$$
$$= x^{(4)} - 6\,x^{(3)} + 13\,x^{(2)} + x^{(1)} + 9$$

$$f(x) = x^4 - 12\,x^3 + 42\,x^2 - 30\,x + 9$$

எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad f(x) = x^{(4)} - 6x^{(3)} + 13x^{(2)} + x^{(1)} + 9$$

இதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கருதுக.

$$\begin{aligned}
\triangle f(x) &= 4x^{(3)} - 6\,(3)\,x^{(2)} + 13\,(2)\,x^{(1)} + 1 \\
&= 4x^{(3)} - 18x^{(2)} + 26x^{(1)} + 1 \\
\triangle^2 f(x) &= 12x^{(2)} - 36x^{(1)} + 26 \\
\triangle^3 f(x) &= 24x^{(1)} - 36 \\
\triangle^4 f(x) &= 24 \\
\triangle^5 f(x) &= 0
\end{aligned}$$

மாற்று வழி :—(Alternate Method)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 30x + 9 \\
&= Ax^{(4)} + Bx^{(3)} + Cx^{(2)} + Dx^{(1)} + E \\
&= Ax\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) + Bx\,(x-1)\,(x-2) \\
&\qquad + Cx\,(x-1) + Dx + E.
\end{aligned}$$

எனக் கொள்க.

$f(x)$-ஐ x-ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது $x^3 - 12x^2 + 42x - 30$. இதில் மீதி $9 = E$. இது போல $x^3 - 12x^2 + 42x - 30$ என்ற சார்பை $(x-1)$ ஆல் வகுக்க $x^2 - 11x + 31$ என்ற ஈவு கிடைக்கிறது. இதில் மீதி $1 = D$.

இதையே கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{l|r|l}
(x-1) & x^3 - 12x^2 + 42x - 30 & x^2 - 11x + 31 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & -11x^3 + 42x \\
 & -11x^3 + 11x \\
\hline
 & 31x - 30 \\
 & 31x - 31 \\
\hline
 & 1 = D
\end{array}$$

$x^2-11x+31$ என்ற சார்பை $(x-2)$ ஆல் வகுக்க ஈவு $x-9$ என்றாகிறது. இதில் மீதி $13=C$. இறுதியாக $x-9$-ஐ $(x-3)$ ஆல் வகுக்க ஈவு $1=A$ என்றும் மீதி $-6=B$ என்றும் கிடைக்கின்றன.

ஆகவே,

$$x^4-12x^2+42x^3-30x+9 = x^{(4)}-6x^{(3)}+13x^{(2)}+x^{(1)}+9$$

கீழ்வரும் வழியைப் பின்பற்றுவதால் இந்த முறை எளிதாக்கப்படுகிறது.

1. குணகங்களை x^4, x^3, ... களிலிருந்து பிரித்து அக்குணகங்களைக் கொண்டே கணக்கைப் போடுக.

2. கழிப்பதற்குப் பதிலாகக் கூட்ட, $(x-1)$, $(x-2)$ ...... இவற்றில் உள்ள எதிர் எண்களுக்கு $(-1, -2, ...)$ப் பதிலாக நேர் எண்களைக் $(1, 2, ...)$ கருதவும்.

இவ்வாறு சுருக்கிய முறை கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

1	1	−12	42	−30	9
	0	1	−11	31	
2	1	−11	31	1	
	0	2	−18		
3	1	−9	13		
	0	3			
4	1	−6			
	0				
	1				

$$\therefore \quad f(x) = x^4-12x^3+42x^2-30x+9$$
$$= x^{(4)}-6x^{(3)}+13x^{(2)}+x^{(1)}+9$$

மாதிரி 3.

$11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$ என்னும் சார்பினைக் காரணீயப் பெருக்கு அமைப்பில் எழுதி அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளைக் கண்டறிக.

$f(x) = 11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$ எனக் கொள்க.

இதனை $f(x) = Ax(x-1)(x-2)(x-3)$
$+ Bx(x-1)(x-2) + Cx(x-1) + Dx + E$

என எழுதலாம்.

அதாவது $f(x) = Ax^{(4)} + Bx^{(3)} + Cx^{(2)} + Dx^{(1)} + E$

A, B, C, D, E, ஆகியவற்றைக்காண 11, 5, 2, 1, -15 என்ற குணகங்களை (coefficients)-த் தனிப்படுத்தி எழுதிக் கீழ் வருமாறு அமைக்கிறோம்.

1	11	5	2	1	-15
		11	16	18	
2	11	16	18	19	
		22	76		
3	11	38	94		
		33			
	11	71			

இதிலிருந்து A = 11, B = 71, C = 94, D = 19, E = -15 எனக் காண்கிறோம்.

$\therefore \; f(x) = 11x^{(4)} + 71x^{(3)} + 94x^{(2)} + 19x^{(1)} - 15$ என்ற காரணீயப் பெருக்கமாக அமைகிறது.

கீழ்க்காண்பவை இதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகள்.

$$\Delta f(x) = 44x^{(3)} + 213x^{(2)} + 188x^{(1)} + 19$$
$$\Delta^2 f(x) = 132x^{(2)} + 426x^{(1)} + 188$$
$$\Delta^3 f(x) = 264x^{(1)} + 426$$
$$\Delta^4 f(x) = 264$$
$$\Delta^5 f(x) = 0$$

பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் (Differences of Zero)

$\Delta^n x^r$-ல் $x=0$ எனப் பிரதியிட கிடைக்கும் மதிப்புகள் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள் எனப்படும். இவற்றை $n<r$ என்கிறபோது சாதாரணமாக $\Delta^n 0^r$ என எழுதுகிறோம்.

$\Delta^n x^r$-ன் பல மாறுபட்ட மதிப்புகளைக் காண கீழ்க்கண்ட வாறு ஒரு கூட்டு அமைப்பில் உள்ள ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம்.

$\Delta^n x^r = (E-1)^n x^r$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \Delta^n x^r = \left[E^n - \binom{n}{1} E^{n-1} + \binom{n}{2} E^{n-2} - \ldots\ldots\right] x^r$$

$$= E^n x^r - \binom{n}{1} E^{n-1} x^r + \binom{n}{2} E^{n-2} x^r - \ldots\ldots$$

$$(x+n)^r - \binom{n}{1} (x+n-1)^r + \binom{n}{2} (x+n-2)^r - \ldots + \ldots\ldots$$

இதில் $x=0$ எனப் பிரதியிட

$$\Delta^n 0^r = n^r - \binom{n}{1} (n-1)^r + \binom{n}{2} (n-2)^r - \ldots\ldots$$

இதுதான் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் சூத்திரமாகும்.

இதில் n, r இவற்றிற்குப் பல மாறுபட்ட மதிப்புகள் பிரதியிட $\Delta^n 0^r$ க்குப் பல மதிப்புகள் பெறுகிறோம். இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் அட்டவணை ஒன்றை அமைக்கலாம்.

மேற்கண்ட சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$\Delta^n x^r = (x+n)^r - \binom{n}{1} (x+n-1)^r + \binom{n}{2} (x+n-2)^r - \ldots\ldots$$

இதில் n, r, x இவற்றிற்குப் பதிலாக $n-1, r-1, x+1$ என்று பிரதியிட

$$\Delta^{n-1} (x+1)^{r-1} = (x+n)^{r-1} - \binom{n-1}{1} (x+n-1)^{r-1} + \ldots\ldots$$

$$= E^x n^{r-1} - \binom{n-1}{1} E^x (n-1)^{r-1} + \ldots\ldots$$

$$= E^x \left[n^{r-1} - \binom{n-1}{1} (n-1)^{r-1} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{n} E^x \left[n^r - \binom{n}{1} (n-1)^r + \binom{n}{2} (n-2)^r - \ldots\ldots \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[(x+n)^r - \binom{n}{1} (x+n-1)^r + \binom{n}{2} (x+n-2)^r - \ldots\ldots \right]$$

$$= \frac{1}{n} \Delta^n x^r$$

$$\therefore \quad \Delta^n x^r = n \Delta^{n-1} (x+1)^{r-1}$$
$$= n \Delta^{n-1} E x^{r-1}$$
$$= n \Delta^{n-1} (1+\Delta) x^{r-1}$$
$$= n [\Delta^{n-1} x^{r-1} + \Delta^n x^{r-1}]$$

இதில் $x=0$ எனப் பிரதியிட

$$\Delta^n \ 0^r = n [\Delta^{n-1} 0^{r-1} + \Delta^n 0^{r-1}]$$

இந்த நிரூபணம் 'டீ மார்கனால்' (De Morgan) கொடுக்கப் பட்டது.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி இச் சூத்திரத்தின் பொது வான ஒரு அமைப்பை $f_1(x) \cdot f_2(x)$ என்ற ஒரு கூட்டுச் சார் பைக் (compound function) கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

பொதுவாக

$$\Delta^n x^r = (x+n) \Delta^n x^{r-1} + n \Delta^{n-1} x^{r-1}$$

என நிரூபிக்கலாம்.

$f_1(x) \cdot f_2(x)$ என்ற கூட்டுச் சார்பைக் (compound function) கருதுக. சார்பு $f_1(x)$ க்கு உரிய செயலிகளாக (operators) E_1, Δ_1 ஆகியவற்றைக் கொள்க. மற்ற சார்பு $f_2(x)$ க்கு உரிய செயலிகளாக E_2, Δ_2 ஆகியவற்றைக் கொள்க.

$[f_1(x) f_2(x)]$-ன் முதல் வேறுபாட்டைக் கருதுக.

$$\Delta [f_1(x) f_2(x)] = f_1(x+1) f_2(x+1) - f_1(x) f_2(x)$$
$$= E_1 f_1(x) E_2 f_2(x) - f_1(x) f_2(x)$$
$$= [E_1 E_2 - 1] f_1(x) f_2(x)$$
$$= [(1+\Delta_1)(1+\Delta_2) - 1] f_1(x) f_2(x)$$
$$= [\Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2] f_1(x) f_2(x)$$
$$= [\Delta_1 + \Delta_2 E] f_1(x) f_2(x)$$

$$\therefore \quad \triangle^n [f_1(x) f_2(x)] = [\triangle_1 + \triangle_2 \, E_1]^n f_1(x) f_2(x)$$

$$= \left[\triangle_1^{\,n} + \binom{n}{1} \triangle_1^{\,n-1} E_1 \triangle_2 + \binom{n}{2} \triangle_1^{\,n-1} E_1^{\,2} \triangle_2^{\,2} + \ldots\ldots\right] f_1(x) f_2(x)$$

$$= f_2(x) \triangle_1^{\,n} f_1(x) + \binom{n}{1} \triangle_2 f_2(x) \triangle_1^{\,n-1} f_1(x+1) + \ldots\ldots$$

மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் $f_1(x) = x^{r-1}$ எனவும் $f_2(x) = x$ எனவும் கொள்க. பின்னர் கீழ் வருமாறு எழுதலாம்.

$$\triangle^n (x^{r-1} x) = x \triangle^n x^{r-1} + n \triangle^{n-1} (x+1)^{r-1} + 0$$
$$= x \triangle^n x^{r-1} + n \triangle^{n-1} E x^{r-1}$$
$$= x \triangle^n x^{r-1} + n \triangle^{n-1} (1+\triangle) x^{r-1}$$

$$\therefore \quad \triangle^n x^r = (x+n) \triangle^n x^{r-1} + n \triangle^{n-1} x^{r-1}$$

இதுதான் நாம் நிரூபிக்க வேண்டிய பொதுச் சூத்திரம்.

இதில் $x=0$ எனப் பிரதியிட

$$\triangle^n 0^r = n [\triangle^n 0^{r-1} + \triangle^{n-1} 0^{r-1}]$$

n, r இவற்றின் பல மதிப்புகளுக்கு $\triangle^n 0^r$-ன் பல மதிப்புகளை இதற்குரிய 'டீ மார்க'னின் (De Morgan) சூத்திரத்திலிருந்து பெறுகிறோம். இம் மதிப்புகளைக் ($\triangle^n 0^r$) கொண்டு பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் அட்டவணை கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கிறோம்.

பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் அட்டவணை.

r	$\triangle 0^r$	$\triangle^2 0^r$	$\triangle^3 0^r$	$\triangle^4 0^r$	$\triangle^5 0^r$
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	
5	1	30	150	240	120
6	1	62	540	1560	1800
7	1	126	1806	8400	16800

பூச்சியத்தின் எந்த ஒரு வேறுபாட்டைக் காணவும் அதற்கு முந்திய படுக்கை வரிசையிலுள்ள (row) இரு எண்களைக் கூட்டிப் பின்னர் n ஆல் பெருக்கவேண்டும். இதையே சுருக்கமாகக் கீழ்வரும் சமன்பாடு காட்டுகிறது.

$$\Delta^n 0^r = n[\Delta^n 0^{r-1} + \Delta^{n-1} 0^{r-1}]$$

இங்கு n என்பது Δ-வின் படியாகும்.

மாதிரி 1.

$\Delta^2 0^3$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

'டீ மார்க'னின் சூத்திரத்தில் $n = 2$ எனவும் $r = 3$ எனவும் பிரதியிட

$$\begin{aligned}\Delta^2 0^3 &= 2[\Delta^2 0^2 + \Delta 0^2]\\ &= 2(2+1)\\ &= 6\end{aligned}$$

அதாவது $\Delta^2 0^3$-ன் மதிப்பைக் காண இரண்டாவது படுக்கை வரிசையில் உள்ள 1, 2 என்ற இரு எண்களைக் கூட்டிப் பின்னர் $n = 2$ ஆல் பெருக்குகிறோம்.

மாதிரி 2.

$\Delta^3 0^7$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

'டீ மார்க'னின் சூத்திரத்தில் $n = 3$, எனவும் $r = 7$ எனவும் பிரதியிட

$$\begin{aligned}\Delta^3 0^7 &= 3[\Delta^3 0^6 + \Delta^2 0^6]\\ &= 3[62 + 540]\\ &= 1806\end{aligned}$$

62, 540 என்ற எண்கள் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் அட்டவணையில் $r = 6$ என்ற ஆறும் படுக்கை வரிசை (row) யில் உள்ளன.

வரிசைகளின் கூட்டுத்தொகை காணவும், x, r இவற்றின் பல மதிப்புகளுக்கு x^r-ன் மதிப்புகளைக் காணவும் பூச்சியத்தின் வித்தியாசங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். மாதிரியாக $(2{\cdot}75)^3$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

'நியூட்டனின்' சூத்திரத்தைக் கருதுக.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \triangle f(0) + \frac{x(x-1)}{2!} \triangle^2 f(0) + \ldots\ldots$$

$$= f(0) + \frac{x^{(1)}}{1!} \triangle f(0) + \frac{x^{(2)}}{2!} \triangle^2 f(0) + \ldots\ldots$$

$f(x) = x^r$ எனக் கொள்க.

$\therefore \quad f(0) = 0^r, \; \triangle f(0) = \triangle 0^r$ எனவும் ஆகும்.

$$\therefore \quad x^r = 0^r + \frac{x^{(1)}}{1!} \triangle 0^r + \frac{x^{(2)}}{2!} \triangle^2 0^r + \ldots\ldots \qquad \text{I}$$

$0^r = 0$ என அறிவோம்.

$\triangle 0^r, \; \triangle^2 0^r \ldots\ldots$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணக் கீழ்க் காணும் விதியைக் கருதுக.

$$\triangle^n 0^r = n[\triangle^n 0^{r-1} + \triangle^{n-1} 0^{r-1}]$$

$x^r = (2{\cdot}75)^3$ எனக் கொள்க.

இங்கு $x = 2{\cdot}75, \; r = 3$ ஆகும்.

பூச்சியத்தின் வித்தியாசங்களின் அட்டவணையிலிருந்து $\triangle 0^3 = 1, \quad \triangle^2 0^3 = 6, \quad \triangle^3 0^3 = 6$ எனப் பெறுகிறோம்.

இவற்றை x^r-க்கு உரிய சமன்பாடு I ல் பிரதியிட

$$(2{\cdot}75)^3 = 0 + (2{\cdot}75) \times 1 + \frac{(2{\cdot}75)\,(1{\cdot}75)}{1\,.\,2}\,6$$

$$+ \frac{(2{\cdot}75)\,(1{\cdot}75)\,(0{\cdot}75)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,6$$

$$= 20{\cdot}796875$$

எனக் காண்கிறோம்.

புள்ளியியலில் பரவல்களின் (Statistical Distributions) விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (moments) காண்பது பூச்சியத்தின் வித்தியாசங்களின் பயன்களில் ஒன்ருகும். மாதிரியாக ஈருறுப்புப் பரவலைக் (Binomial Distribution) கருதுவோம்.

x-ஐ ஈருறுப்புப் பரவலின் மாறியாகக் கொண்டால் அதன் பரவல், $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ என அறிவோம். இங்கு p, q என்பன முறையே வெற்றிக்கும் தோல்விக்கும் உரிய மாறு நிகழ்வு எண்கள். 0, 1, 2, 3, ... n என்பன x-ன் மதிப்புகளாகும்.

$$\sum_{0}^{n} (q+p)^n = \sum_{0}^{n} f(x)$$ என அறிவோம்.

r ஆம் நிலை விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (r th order moment) யைக் கருதுக.

$$\begin{aligned}
\mu^1_r &= \sum_{0}^{n} x^r f(x) \\
&= 0^r f(0) + 1^r f(1) + 2^r f(2) + \ldots\ldots + n^r f(n) \\
&= 0^r f(0) + \mathrm{E}\, 0^r f(1) + \mathrm{E}^2 0^r f(2) + \ldots\ldots + \mathrm{E}^n 0^r f(n) \\
&= [f(0) + \mathrm{E} f(1) + \mathrm{E}^2 f(2) + \ldots\ldots + \mathrm{E}^n f(n)]\, 0^r \\
&= \left[q^n + \mathrm{E}\binom{n}{1} pq^{n-1} + \mathrm{E}^2 \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots\ldots + \mathrm{E}^n p^n \right] 0^r \\
&= \left[q^n + \binom{n}{1} (\mathrm{E}p)\, q^{n-1} + \binom{n}{2} (\mathrm{E}p)^2 q^{n-2} + \ldots\ldots + (\mathrm{E}p)^n \right] 0^r \\
&= (q + \mathrm{E}p)^n\, 0^r
\end{aligned}$$

$r = 1$ என்றால்

$$\begin{aligned}
\mu^1_1 &= (q + \mathrm{E}p)^n\, 0 \\
&= [q + p(1 + \triangle)]^n\, 0 \\
&= [q + p + p\triangle]^n\, 0 \\
&= (1 + p\triangle)^n\, 0 \\
&= \left[1 + \binom{n}{1} p\triangle + \binom{n}{2} p^2 \triangle^2 + \ldots\ldots p^n \triangle^n \right] x \Big|_{x=0}
\end{aligned}$$

$$= \left[x + \binom{n}{1} p \triangle x + \binom{n}{2} p^2 \triangle^2 x + \ldots\ldots p^n \triangle^n x\right]_{x=0}$$

$$= 0 + np + 0$$

$= np$ என வருகிறது.

$$(\because \quad \triangle x^{(1)} = \triangle x = 1, \; \triangle^2 x^{(1)} = \triangle(\triangle x) = \triangle(1) = 0)$$

$r = 2$ என்றால்

$$\mu'_2 = [1 + p\triangle]^n 0^2$$

$$= \left[1 + \binom{n}{1} p\triangle + \binom{n}{2} p^2 \triangle^2 + \ldots\ldots + p^n \triangle^n\right] x^2 \Big|_{x=0}$$

$$= \left[x^2 + \binom{n}{1} p \triangle x^2 + \binom{n}{2} p^2 \triangle^2 x^2 + \ldots\ldots\right]_{x=0}$$

$$= \left[x^2 + np(2x+1) + \binom{n}{2} p^2\, 2 + 0 \ldots\ldots\right]_{x=0}$$

$$= 0 + np + \binom{n}{2} p^2\, 2$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

$$\{\because \quad x^2 = x(x-1) + x = x^{(2)} + x^{(1)}$$
$$\triangle[x^{(2)} + x^{(1)}] = 2x^{(1)} + 1$$
$$\triangle^2 x^2 = 2\}$$

ஆகையால்

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$
$$= np + n(n-1)p^2 - (np)^2$$
$$= npq$$

இவ்வாறாக ஈருறுப்புப் பரவலின் முதல் இரண்டு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளை முறையே np எனவும் npq எனவும் கண்டோம். இது போலவே நம்மால் மற்ற உயர்படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண முடியும்.

மாதிரி 1.

$f(E^n)\,0^m = n^m f(E)\,0^m$ எனக் காட்டுக.

$f(E^n) = (E^n)^r$ எனக் கொள்க.

$$\therefore f(E^n)\, 0^m = [(E^n)^r \cdot x^m]_{x=0}$$
$$= [E^{nr}\, x^m]_{x=0}$$
$$= [(x + nr)^m]_{x=0}$$
$$= (nr)^m$$
$$= [n^m\, E^r\, x^m]_{x=0}$$
$$= n^m f(E)\, 0^m$$

மாதிரி 2.

$$\Delta^n 0^r + \binom{r}{1} \Delta^n 0^{r-1} + \binom{r}{2} \Delta^n 0^{r-2} + \ldots\ldots + \frac{r!}{(r-n)!}$$

$$= \frac{\Delta^{n+1} 0^{r+1}}{n+1}$$ என நிரூபிக்க.

$\Delta^n (x+1)^r$ ஐக் கருதுக.

$$\Delta^n (x+1)^r = \Delta^n \left[x^r + \binom{r}{1} x^{r-1} + \binom{r}{2} \cdot x^{r-2} + \ldots\ldots + 1 \right]$$

$$[\Delta^n (x+1)^r]_{x=0} = \Delta^n \left[0^r + \binom{r}{1} 0^{r-1} + \binom{r}{2} 0^{r-2} + \ldots\ldots \right]$$

$\Delta^n (x+1)^r = \Delta^n E\, 0^r$ எனவும் எழுதலாம்.

$$= \Delta^n (1 + \Delta)\, 0^r$$
$$= \Delta^n 0^r + \Delta^{n+1} 0^r$$
$$= \frac{1}{n+1} \left[(n+1) (\Delta^n 0^r + \Delta^{n+1} 0^r) \right]$$
$$= \frac{\Delta^{n+1} 0^{n+1}}{n+1}$$

I ஆம் விதிப்படி.

மாதிரி 3.

$$\triangle^n 0^{n+1} = \tfrac{1}{2} n (n+1) \triangle^n 0^n$$

என நிரூபிக்க.

$$\triangle^n 0^r = n [\triangle^n 0^{r-1} + \triangle^{n-1} 0^{r-1}]$$

என அறிவோம்.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle^n 0^{n+1} &= n [\triangle^n 0^n + \triangle^{n-1} 0^n] \\ &= n [n! + \triangle^{n-1} 0^n] \\ &= n n! + n (n-1) [\triangle^{n-1} 0^{n-1} + \triangle^{n-2} 0^{n-1}] \\ &= nn! + n (n-1) (n-1)! + n (n-1) \triangle^{n-2} 0^{n-1} \\ &= n! [n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots + 2 \triangle 0^2 + 1] \\ &= n! \left[\frac{n (n+1)}{2}\right] \\ &= \frac{n (n+1)}{2} \triangle^n 0^n \end{aligned}$$

ஏனெனில் $\triangle^n 0^n = n!$ என அறிவோம்.

மாதிரி 4.

n நேர் எண்ணுக (positive no.) இருக்கும்போது

$$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n$$

எனக் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால்

$(n-1)^2 c_1 + (n-3)^2 c_3 + (n-5)^2 c_5 + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் மதிப்பைக் காண்க.

$(x-1)^2 c_1 + (x-3)^2 c_3 + (x-5)^2 c_5 + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரைக் கருதுக.

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 c_1 + (x-3)^2 c_3 + (x-5)^2 c_5 + \ldots\ldots \\ &= (E^{-1} x^2) c_1 + (E^{-3} x^2) c_3 + (E^{-5} x^2) c_5 + \ldots\ldots \\ &= (E^{-1} c_1 + E^{-3} c_3 + \ldots\ldots] x^2 \\ &= \tfrac{1}{2} [(1+E^{-1})^n - (1-E^{-1})^n] x^2 \\ &= \tfrac{1}{2} [(\triangle+2)^n - \triangle^n] E^{-n} x^2 \\ &= \tfrac{1}{2} [(\triangle+2)^n - \triangle^n] (x-n)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} [(\triangle+2)^n - \triangle^n] 0^2 \qquad x = n \text{ ஆனல்.} \\ &= \tfrac{1}{2} [2^n 0^n + n 2^{n-1} \triangle 0^2 + \tfrac{1}{2} n (n-1) 2^{n-2} \triangle^2 0^2 \\ &\qquad + \ldots \ldots \ldots + \ldots \ldots] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [n\, 2^{n-1} + n\,(n-1)\, 2^{n-2}]$$
$$= 2^{n-3}\, n\,(n+1)$$

மாதிரி 5.

$$(1 + \log E)^r\, 0^m = \frac{r!}{(r-m)!}$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு, $r > m$.

$$(1 + \log E)^r\, 0^m = (1 + D)^r\, 0^m$$
$$= \left[1 + \binom{r}{1} D + \binom{r}{2} D^2 + \ldots\ldots \right] x^m)_{x=0}$$
$$= \left[x^m + \binom{r}{1} m\, x^{m-1} + \binom{r}{2} m\,(m-1)\, x^{m-2} \right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + \binom{r}{m} m! + \binom{r}{m+1} 0 + \ldots\ldots \right]_{x=0}$$

இதில் $x = 0$ எனப் பிரதியிட

$\binom{r}{m} m!$ என்ற உறுப்பைத் தவிர மற்றவை யெல்லாம் மறைந்து விடுகின்றன.

எனவே

$$(1 + \log E)^r\, 0^m = \binom{r}{m} m!$$
$$= \frac{r!}{m!\,(r-m)!}\, m!$$
$$= \frac{r!}{(r-m)!}$$

எனக் காண்கிறோம்.

இங்கு $r > m$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இல்லாவிடில் $(r-m)!$ -ன் மதிப்பு கிடையாது.

மாதிரி 6.

$x < 1$ என்றால்

$$1^n + 2^n x + 3^n x^2 + \ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} \left[\Delta\, 0^n + \left(\frac{x}{1-x}\right) \Delta^2\, 0^n + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \Delta^3\, 0^n + \ldots\ldots \right]$$

என நிரூபிக்க.

இடது பக்கத்தைக் கருதுக.

$$1^n + 2^n x + 3^n x^2 + \dots\dots$$

$$= E\,0^n + E^2\,0^n x + E^3\,0^n x^2 + \dots\dots$$

$$= 0^n [E + E^2 x + E^3 x^2 + \dots\dots]$$

$$= E\,0^n [1 + E x + E^2 x^2 + \dots\dots]$$

$$= E\,0^n [1 - E x]^{-1}$$

$$= \frac{E\,0^n}{(1 - E x)}$$

$$= \frac{E\,0^n}{1 - (1 + \triangle)\,x}$$

$$= \frac{E\,0^n}{1 - x - \triangle x}$$

$$= \frac{E\,0^n}{(1 - x)\left\{1 - \frac{\triangle x}{1 - x}\right\}}$$

$$= \frac{E}{1 - x}\left[1 - \frac{\triangle x}{1 - x}\right]^{-1} 0^n$$

$$= \frac{E}{1 - x}\left[1 + \left(\frac{\triangle x}{1 - x}\right) + \left(\frac{\triangle x}{1 - x}\right)^2 + \dots\dots\right] 0^n$$

$$= \frac{1 + \triangle}{1 - x}\left[1 + \frac{\triangle x}{1 - x} + \left(\frac{\triangle x}{1 - x}\right)^2 + \dots\dots\right] 0^n$$

$$= \frac{1}{1 - x}\left[1 + \frac{\triangle x}{1 - x} + \left(\frac{\triangle x}{1 - x}\right)^2 + \dots\dots\right]$$

$$+ \frac{\triangle}{1 - x}\left[1 + \frac{\triangle x}{1 - x} + \left(\frac{\triangle x}{1 - x}\right)^2 + \dots\dots\right]$$

$$= \left[\frac{1}{1 - x} + \triangle \left\{\frac{x}{(1 - x)^2} + \frac{1}{1 - x}\right\}\right.$$

$$\left. + \triangle^2 \left\{\frac{x^2}{(1 - x)^3} + \frac{x}{(1 - x)^2}\right\} + \dots\dots\right] 0^n$$

$$= \frac{1}{1 - x}\left[1 + \frac{\triangle}{1 - x} + \frac{\triangle^2 x}{(1 - x)^2} + \dots\dots\right] 0^n$$

$$= \frac{1}{1-x}\left[0^n + \frac{\Delta\, 0^n}{1-x} + \frac{\Delta^2\, x\, 0^n}{(1-x)^2} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\left[\Delta\, 0^n + \frac{x}{1-x}\Delta\, 0^n + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta^2\, 0^n + \ldots\ldots\right]$$

பயிற்சி 6

1. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளை விளக்குக.
நிருபிக்க :

$$\Delta^n 0^r = n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \ldots\ldots$$

எனவே, கீழ்க்காணும் முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க :

$$\frac{1^4}{2} + \frac{2^4}{2\,.\,4} + \frac{3^4}{2\,.\,4\,.\,6} + \ldots\ldots$$

2. நிருபிக்க: $\Delta^n 0^r = n\,(\Delta^{n-1}\,.\,0^{r-1} + \Delta^n\,.\,0^{r-1})$. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளின் இயல்புகளைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட தொடரின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க :

$$n^2 + (n-1)^2\binom{n}{1} + (n-2)^2\,.\binom{n}{2} + \binom{n}{3}(n-3)^2 + \ldots\ldots$$

இதில் n–ஒரு நேர் முழு எண்.

3. நிருபிக்க :—

$$\Delta f_1(x)\, f_2(x) = f_2(x)\,\Delta f_1(x) + f_1(x+1)\,.\,\Delta f_2(x)$$

மேலும்

$$\Delta^n f_1(x)\,.\,f_2(x) = f_2(x)\,.\,\Delta^n f_1(x)$$

$$+ \binom{n}{1}\Delta f_2(x)\,\Delta^{n-1} f_1(x+1) + \ldots\ldots$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\Delta^n x^r - (x+n)\,\Delta^n x^{r-1} + n\Delta^{n-1}\,.\,x^{r-1}$$

மேலும் $\Delta^n 0^r = n\,[\,\Delta^n 0^{r-1} + \Delta^{n-1}\,.\,0^{r-1}]$

என்று வருவிக்க.

4. பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகளைப் பயன்படுத்தி, $(5{\cdot}5)^3$ மற்றும் $(-0{\cdot}25)^3$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $x > 1$ எனில்,

$$1^n + 2^n \,.\, x + 3^n \,.\, x^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{(1-x)^2}\left[\triangle 0^n + \frac{x}{1-x}\triangle^2 . 0^n + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \triangle^3 0^n + \ldots\ldots\right]$$

என நிரூபிக்க.

6. $[x]^p$ என்பது காரணீயப் பெருக்க p-ம் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறிக்குமெனில்,

$$\sum_{i:0}^{r} [x+i]^n = \frac{1}{(n+1)}\{[x+r+1]^{n+1} - [x]^{n+1}\}$$

என்று காட்டுக.

7. ஒரு பொதுவான பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணீயப் பெருக்க அமைப்பாகக் காட்டுக.

8. $10x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 7x - 18$ என்ற சார்பையும், அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளையும், காரணீயப் பெருக்கின் குறியீட்டில் எழுதுக.

9. ஒரு சார்பின் முதல் நிலை வேறுபாடு

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

என்ற சார்பானல், அந்த சார்பு என்னவென்று கண்டுபிடிக்க.

10. முதல் நிலை வேறுபாடுகள்

(i) $3x^3 + 2x^2 + x + 10$

(ii) $x^2 + 9x + 25$

என்ருல், சார்பைக் கண்டுபிடிக்க.

11. $f(x)$ ஒரு மூன்ரும் படிப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகவும், இடைவெளித்தூரம் $h=1$ ஆகவும் இருப்பின்,

$$f(x) = f(0) + x^{(1)}\triangle f(0) + \frac{x^{(2)}}{2!}\triangle^2 f(0) + \frac{x^{(3)}}{3!}\triangle^3 f(0)$$

என்று நிரூபிக்க.

குறிப்பு : இந்தக் கணக்கு, (8) வது கணக்கின் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை ஆகும். இங்கு $n = 3$.

12. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ என்ற சார்பைக் காரணீயப் பெருக்கக் குறியீடாக எழுதுக.

13. $11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$ என்ற சார்பையும், அதன் அடுத்தடுத்த வேறுபாடுகளையும், காரணீயப் பெருக்க அமைப்பில் எழுதுக.

14. $$\Delta^n . 1^m = \Delta^n . 1^{m-2} + 3n . \Delta^{n-1} 2^{m-2} + n(n-1) . \Delta^{n-2} 3^{m-2}$$

என்று காட்டுக.

15. $$\Delta^n 0^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \Delta^n 0^n = \frac{n}{2}(n+1)!$$

என்று காட்டுக. (M.A. டெல்லி 1955)

16. $(n+1)\Delta^n 0^n = 2[\Delta^{n-1} 0^n + \Delta^n 0^n]$ என்று காட்டுக.
[M.A. டெல்லி 1961]

7. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வரைபடமுறை

(Graphical Method for solving equations)

எதிர்மாா் இடைச் செருகல் மூலம் ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க நாம் அறிவோம். மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்டபடியுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க வரைபட முறையையும் (graphical method) பயன்படுத்தலாம். மாதிரியாக $x^3 - ax - b = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$$f(x) = x^3 - ax - b = 0$$

எனக்கொள்க. ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கு (cubic equation) மூன்று மூலங்கள் உண்டு என அறிவோம்.

$f(x)\,]_{x=\alpha_1} = 0$ என்றால் α_1 என்பது $f(x)$-ன் அந்த மூன்று மூலங்களில் ஒன்றாகும்.

$f(x)$-ன் ஒரு மூலம் (root) x-ன் எந்த இரு மதிப்புகளுக்கு இடையே உள்ளது எனப் பட்டறி முறை (trial and error method) மூலமாகக் காண்கிறோம். மூலத்தின் மதிப்பு மிகவும் சரியாக இருக்கவேண்டும் என்பதற்காக, x-ன் இவ் விரு மதிப்புகளையும் மூலத்திற்கு வெகு அருகில் காணவேண்டும். பின்னர் x, $f(x)$ இவற்றிற்கு ஒரு வரைபடத்தாளில் ஒரு வளைவு வரைகிறோம். அதில் $f(x) = 0$-க்கு நேராக உள்ள x-ன் மதிப்பு தான் $f(x)$-ன் நமக்குத் தேவையான மூலமாகும். ஆனால் நாம் இதைவிட எளிதான ஒரு முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இந்த முறையில் $f(x)$-ஐ $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்ற இரு தனிச் சார்புகளாகவும் அதே சமயத்தில்

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$$

அல்லது $f_1(x) = f_2(x)$

என்று அமையும் வண்ணம் பிரிக்கிறோம்.

மாதிரியாக $x^3 - ax - b = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

இதில் $f(x) = x^3 - ax - b = 0$ $f(x)$-ஐ $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = ax + b$ என்று அமையுமாறு பிரிக்கிறோம்.

$f(\alpha_1) = 0$ என்றால் $f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_1)$ என்றாகிறது. இதனால் $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்ற இரு சார்புகளுக்கும் பொதுவான புள்ளியில் (common point) x-ன் மதிப்பு α_1 என்றாகிறது. ஆகவே ஒரே வரைபடத்தாளில் $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்ற சார்புகளுக்கு வளைவுகள் வரைந்தால் அவற்றின் வெட்டும்புள்ளி (point of intersection) யின் மட்டயம் α_1 என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களில் ஒன்றாகும்.

சமன்பாட்டைத் தீர்க்க என்றால் அச்சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க என்றாகும். ஆகவே α_2, α_3 என்ற மற்ற இரு மூலங்களைக் காண முதலில் $f(x)$-ஐ $(x - \alpha_1)$ என்ற காரணி (factor) யால் வகுத்துப் பின்னர் கிடைக்கும் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணவேண்டும். இவ்வாறு $f(x) = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டிற்கு எல்லா மூலங்களும் காண்கிறோம்.

மாதிரி 1. $x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு வரைபட முறையில் தீர்வு காண்க. (செப்டம்பர் 1963)

$f(x) = x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மூலம் 3-க்கும் 4-க்கும் இடையில் உள்ளது எனப் பட்டறி முறையால் அறிகிறோம். ஆனால் மிகவும் கவனித்துப் பார்த்தால் அந்த மூலம் 3·14-க்கும் 3·20-க்கும் இடையே உள்ளது எனத் தெரிகிறது. இவ்வாறு இடைவெளியைச் சுருக்கும் முறையானது மூலத்தின் மதிப்பைத் துல்லியமானதாக்குகிறது.

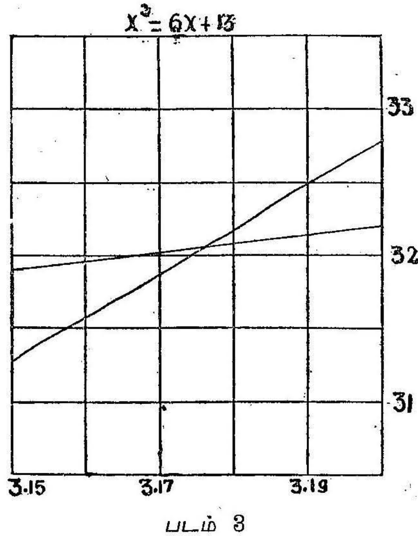
$f(x) = x^3 - 6x - 13 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$x^3 = 6x + 13$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து $f_1(x) = x^3$ எனவும் $f_2(x) = 6x + 13$ எனவும் இரு சார்புகள் கிடைக்கின்றன.

3·14–க்கும் 3·20-க்கும் இடையேயுள்ள x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f_1(x)$ $f_2(x)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

x	$f_1(x) = x^3$	$f_2(x) = 6x+13$
3·14	30·959	31·84
3·16	31·554	31·96
3·17	31·855	32·02
3·18	32·157	32·08
3·20	32·768	32·20



படம் 3

மூலம் $x = 3·17$ க்கு வெகு அருகில் உள்ளது என அறிந்தமையால் $x = 3·17$ க்கு உரிய சார்புகளின் மதிப்புகள் மேலேயுள்ள அட்டவணையில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

வரைபடத் தாளில் x-ன் மதிப்புகள், 3·14, 3·16 ...... 3·20 மட்டயத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு அலகு $1'' = 0{\cdot}01$. 30, 31, 32, 33 என்ற $f(x)$-ன் மதிப்புகள் குறிக்கப்படுகின்றன.

இங்கு அலகு $2'' = 1{\cdot}0$

வரைபடத் தாளில் $[x, f_1(x)]$ என்ற புள்ளிகள் குறிக்கப் படுகின்றன. இப்புள்ளிகளை ஒரு ஒழுங்கான வளைவால் சேர்க்கலாம். இவ்வளைவு $f_1(x) = x^3$-க்கு உரியது. பின்னர் அதே தாளில் $[x, f_2(x)]$ என்ற புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை ஒரு ஒழுங்கான வளைவால் சேர்க்கலாம். இங்குக் குறிப்பாக இது ஒரு நேர் கோடாகக் (Straight line) கிடைக்கிறது. இது $f_2(x) = 6x+13$ என்ற சார்புக்கு உரியது.

இவ்விரண்டு வளைவுகளும் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து (point of intersection) X–அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால் அக்கோடு X-அச்சை $\alpha_1 = 3{\cdot}1763$ என்ற புள்ளி யில் தொடுகிறது. இதுதான் தேவையான நேர்மூலமாகும் (positive root).

மாதிரி 2 : $x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் வரைபட முறையால் காண்க.

(ஏப்ரல் 1959)

$x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

பட்டறிமுறையால் இச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 1-க்கும் 2–க்கும் இடையில் உள்ளது என அறிகிறோம். ஆனால் மிகவும் கவனித்துப் பார்த்தால் இந்த மூலம் 1·40 க்கும் 1·45 க்கும் இடையேயுள்ளது எனத் தெரிகிறது. இவ்வாறு மூலத்தின் இடைவெளியைச் சுருக்குவதால் மூலத்தின் மதிப்பை மிகவும் துல்லியமாகக் காணமுடிகிறது.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$$

எனக் கொள்க.

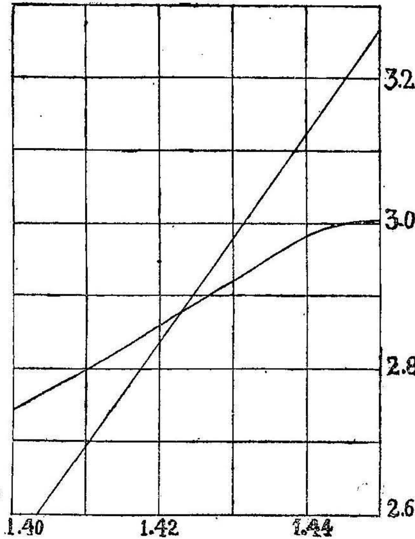
இந்த $f(x)$ ஐ இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரிக்க $f_1(x) = x^3$ எனவும் $f_2(x) = 6x^2 - 3x - 5$ எனவும் கிடைக்கிறது.

1·40-க்கும் 1·45 க்கும் இடையே உள்ள X-ன் மதிப்புகளுக்கு உரிய $f_1(x)$-ன் மதிப்புகளும் $f_2(x)$-ன் மதிப்புகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

X	$f_1(x) = x^3$	$f_2(x) = 6x^2 - 3x - 5$
1·40	2·744	2·560
1·41	2·803	2·699
1·42	2·863	2·838
1·43	2·924	2·979
1·44	2·986	3·122
1·45	3·049	3·265

வரை படத்தில் X-அச்சில் (x-axis) 1·40, 1·41, 1·42, ... 1·45 என்ற x-ன் மதிப்புகளைக் குறிக்கிறோம். y-அச்சில் 2·6, 2·7 ...... 3·3 என்ற $y = f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் குறிக்கிறோம். இதற்கு அலகு $1'' = 0·1$ ஆகும்.

$$x^3 = 6x^2 - 3x - 5$$



படம் 4

$[x, f_1(x)]$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கிறோம். பின்னர் இந்தப் புள்ளிகளை ஒரு ஒழுங்கான வளைவால் சேர்க்கிறோம். இந்த வளைவு $f_1(x) = x^3$-க்கு ஆகும். பிறகு $[x, f_2(x)]$ என்ற புள்ளிகளை அதே வரைபடத் தாளில் குறித்து அவற்றை ஒரு ஒழுங்கான வளைவால் சேர்க்கிறோம். இவ்வளைவு $f_2(x) = 6x^2 - 3x - 5$ என்ற சார்புக்கு வரைந்ததாகும். இவ்விரு வளைவுகளும் வெட்டும் புள்ளி (point of intersection) யிலிருந்து X-அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால் அது X-அச்சில் $x = \alpha_1 = 1{\cdot}4223$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. இதுதான் $(\alpha_1 = 1{\cdot}4223)$ $f(x)$-ன் முதல் மூலமாகும்.

மற்ற இரு மூலங்களைக் காண $f(x)$ ஐ $(x - 1{\cdot}4223)$ ஆல் வகுக்கிறோம். வகுத்தால் நமக்கு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு கீழ் வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$x - 1{\cdot}4223)\ x^3 - 6x^2 + 3x + 5\ (x^2 - 4{\cdot}5777x - 3{\cdot}511$$
$$x^3 - 1{\cdot}4223x^2$$
$$-4{\cdot}5777\ x^2 + 3x$$
$$-4{\cdot}5777\ x^2 + 6{\cdot}511\ x$$
$$-3{\cdot}511\ x + 5{\cdot}000$$
$$-3{\cdot}511\ x + 4{\cdot}983$$
$$+0{\cdot}007$$

இங்கு மீதி 0·007. இது மிகவும் குறைவாக இருப்பதால் விட்டு விடுகிறோம். இது பூச்சியத்திற்கு மிக அருகில் இருப்பதால் முதல் மூலம் மிகவும் சரியானது என்று தெரிகிறது.

நாம் தீர்வு காண வேண்டிய இருபடிச் சமன்பாடு

$x^2 - 4{\cdot}5777\ x - 3{\cdot}511$ ஆகும்.

இதன் மற்ற இரு மூலங்களைக் கீழ் வருமாறு காண்கிறோம்.

$$x = \frac{4{\cdot}5777 \pm \sqrt{20{\cdot}955 + 14{\cdot}044}}{2}$$

$$= 5{\cdot}2469;\ -0{\cdot}6692$$

ஆகவே $\alpha_1 = 1{\cdot}4223$

$\alpha_2 = 5{\cdot}2469$

$\alpha_3 = -\ 0{\cdot}6692$

என்பன $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களாகும்.

மாதிரி 3: வரைபட முறையில் கீழ்வரும் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க.

$$10^{1/2\,x-1} = 6x - 8$$

(ஏப்ரல் 1959)

$f(x) = 10^{1/2x-1} - 6x + 8 = 0$ எனக் கொள்க.

ஆகவே $f_1(x) = 10^{1/2\,x-1}$; $f_2(x) = 6x - 8$ என எழுதலாம்.

இங்கு $f_1(x)$, $f_2(x)$ என்பன $f(x)$-லிருந்து கிடைத்த இரு சார்புகள்.

பட்டறி முறையால் (trial and error method) $f(x)$-ன் மூலம் 1-க்கும் 2-க்கும் இடையில் உள்ளது எனத் தெரிகிறது.

1·00, 1·25, 1·50, 1·75, 2·00 என்பன x-க்குக் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளாகும்.

இந்த மதிப்புகளை x-க்குப் பிரதியிட $f_1(x)$, $f_2(x)$ இவற்றின் மதிப்புகள் கீழ்வருமாறு கிடைக்கின்றன.

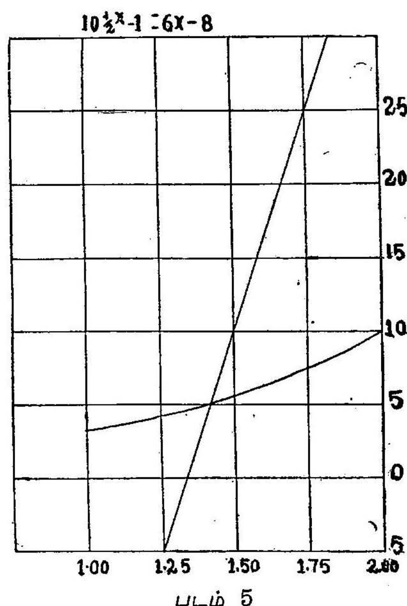
x	$f_1(x) = 10^{1/2\,x-1}$	$f_2(x) = 6x - 8$
1·00	0·316	−2·0
1·25	0·422	−0·5
1·50	0·563	1·0
1·75	0·750	2·5
2·00	1·000	4·0

வரைபடத்தாளில் X-அச்சில் (x-axis) 1·00, 1·25, ... 2·00 என்ற x-ன் மதிப்புகளை $1'' = 0{\cdot}25$ என்ற அலகுடன் குறிக்

கிறோம். இதுபோலவே Y-அச்சில் $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots 4$ என்ற மதிப்புகளை $1'' = 0{\cdot}5$ என்ற அலகுடன் குறிக்கிறோம்.

சார்பு $f_1(x)$ ஐக் கருதுக.

முதலில் $[x, f_1(x)]$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கிறோம். இப்புள்ளிகளை ஒரு ஒழுங்கான வளைவால் (smooth curve) சேர்க்கிறோம்.



படம் 5

இவ்வளைவு $f_1(x)$-க்கு வரைந்ததாகும். பிறகு அதே வரைபடத்தாளில் $[x, f_2(x)]$ என்ற மற்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கிறோம். இப்புள்ளிகளைச் சேர்க்க $f_2(x) = 6x - 8$ க்கு உரிய நேர்கோடு கிடைக்கிறது.

முதலில் வரைந்த வளைவும் பின்னர் வரைந்த நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து X-அச்சுக்கு ஒரு செங்குத்துக் கோடு (perpendicular line) வரைய, அது X-அச்சை $\propto = 1{\cdot}41875$ ல் சந்திக்கிறது. ஆகவே $\propto = 1{\cdot}41875$ தான் $f(x)$-ன் மூலம் ஆகும்.

பயிற்சி 7

1. $x^3-3x^2+1\cdot67x+0\cdot462=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை வரைபட முறையால் காண்க. (செப்டம்பர் 1960)

2. $x^3-7x+7=0$ என்ற சமன்பாட்டை வரைபட முறையால் தீர்க்க. (ஏப்ரல் 1963)

3. $x^3+3x-35=0$ என்ற சமன்பாட்டை வரைபட முறையால் தீர்க்க. (ஏப்ரல் 1965)

4. $2^x-x^2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலத்தை வரைபட முறையால் காண்க. (ஏப்ரல் 1961)

5. வரைபட முறையால் கீழ் வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $x^3-x^2+5x-3=0$

(ii) $x^3+x-3=0$

(iii) $x^3-9x-14=0$

8. சமன்பாடுகளின் எண்சார் தீர்வு
(Numerical Solution of equations)

இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் காணும் முறையைக் கீழ் வகுப்புகளில் படித்திருக்கின்றோம். இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது உருவம்

$ax^2+bx+c=0$ என்பதாகும்.

இதில் மாறி x ஆகும். இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மூலங்கள் (roots) உள்ளன. அவைகளாவன

$$1. \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2. \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$f(x)=0$ என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டில், மாறிக்குச் சில மதிப்புகளைப் பிரதியிடும்பொழுது வலப் பக்கத்திற்குச் (0 க்கு) சமமானல், அம்மதிப்புகளைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் கூறுகின்றோம். மூன்றும்படி, நான்காம்படிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களை எளிதில் கணக்கிட இயலும். n–ஆவது படிச் சமன்பாட்டிற்கு, n மூலங்கள் இருக்கும். அவைகளில் சில நேர் மூலங்களாகவும், சில எதிர் மூலங்களாகவும், மெய் மூலங்களாகவும் கற்பனை மூலங்களாகவும் இருக்கலாம். ஒரு மாறியில் அமைந்த n–ஆவது படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை, அதன் குணகங்களை உபயோகித்து, கணக்கிட இயலும். மாறி ஒன்றுக்கு மேற்பட்டு இருக்கும் பொழுது மாறிகளின் எண்ணிக்கையும், தனித்த சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும் ஒன்ருக இருக்குமானல் ஒரே தீர்வாக (Unique solution) அமையும். மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருந்தால் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் இருக்கும். மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக இருந்தால் ஒரு தீர்வாவது இருக்கும்.

மேலே குறிப்பிட்ட முறைகளில் சில சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முடியாது. தீர்வுகாண, அதாவது மூலங்களின் மதிப்புகளைக் காணக் குறிப்பிட்ட முறையும் கிடையாது. அப்படித் தீர்வு காண முடியாத சமன்பாடுகளின் எடுத்துக்காட்டுக்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. $a \log_e x - b \cot x = 1$

2. $x - \cos\left(\dfrac{0{\cdot}7854 - x\sqrt{x^2 - 1}}{1 - 2x^2}\right) = 0$

3. $3x - \cos x - 1 = 0$

4. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10} - \dfrac{x^7}{42} + \dfrac{x^9}{216} - \ldots\ldots = 0{\cdot}4431135$

இம்மாதிரி சமன்பாடுகளுக்கு 'Transcendental Equations' என்று பெயர். இவைகளைத் தீர்த்து மூலங்களைக் கண்டு பிடிக்க பொதுவாக ஐந்து முறைகள் உள்ளன. அவைகளாவன.

1. எதிர் மாா் இடைச் செருகல் (Inverse Interpolation)
2. வரைபட முறை (Graphical Method)
3. இயந்திர முறை (Mechanical Method)
4. நேம வரை முறை (Nomographic Method)
5. எண்சார் முறை (Numerical Method)

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பல தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடும் முறையினை (4) ஆவது பகுதியில் பார்த்தோம். வரைபட முறையில் அதாவது சார்பின் வரைகோடு x அச்சினை வெட்டும் இடத்திலிருந்து மூலத்தை மதிப்பிடும் முறையை (7) ஆவது பகுதியில் படித்தறிந்தோம்.

அறிவியலின் அளவிடற்கரிய முன்னேற்றத்தின் விளைவுகளில் ஒன்ருன 'எலக்ட்ரானிக் கம்ப்யூட்டர்'களை உபயோகித்து எந்தச் சமன்பாட்டிற்கும் மூலங்களைக் கணக்கிட இயலும். ஆனல் இக்கம்ப்யூட்டர்களை எல்லாராலும் பயன்

படுத்த முடியாது. காரணம் அவைகளின் விலை மதிப்பு மிக அதிகம். எனவே சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, இவ்வியந்திரங்களை அறிவியலிலும், செல்வத்திலும் தலைசிறந்த நாடுகளும் நிலையங்களுமே பயன்படுத்த முடியும்.

நேம வரைபட முறையில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் வழிவகைகளைத் தனியாக ஒரு பகுதியாகப் படிக்கப் போகின்றோம். இம்முறையில் ஒரு பொதுச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு நேம வரைபடம் வரைந்து விட்டால், அதே இனமற்ற சமன்பாடுகளின் மூலங்களை இந்த ஒரு வரைபடத்திலிருந்தே எளிதாகக் கணக்கிடலாம். உதாரணமாக

$$ax^2 + bx + c = 0$$

என்னும் பொது உருவ இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரைபடம் வரைந்தால், எந்த இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும் (a, b, c ஆகியவைகளின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு இருபடிச் சமன்பாடுகள் அமையும். உதாரணமாக $a=1$, $b=2$, $c=-3$ ஆக இருக்கும் பொழுது $x^2+2x-3=0$) இந்த ஒரே வரைபடத்திலிருந்து மூலங்களைக் கணக்கிட இயலும். ஆனால் பொது இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு நேம வரைபடம் வரைந்தால், மற்ற படியிலுள்ள சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க இந்நேம வரைபு உதவாது. எனவே ஒவ்வொரு இன, ஒவ்வொரு படிச் சமன்பாட்டுக்கும் ஒவ்வொரு நேம வரைபு அமைக்க வேண்டியிருக்கின்றது. அந்தக் கடினத்தைக் கருதி நாம் இம்முறையை மிகுதியாகப் பின்பற்றுவதில்லை.

எனவே மேலே கூறிய முறைகளின் குறைபாடுகளையும் கடினத்தையும் கருதி, எளிதான, அதே நேரத்தில் மூலங்களைச் சரியாக மதிப்பிட எண்ணியல் முறையினைப் பின்பற்றுகின்றோம். இம்முறையில் மூலங்களின் தோராய மதிப்புகளைக் காணவேண்டும். அத்தோராய மதிப்புகள் வரைபட முறையில் அல்லது பட்டறிமுறையில் எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. இங்கு $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், $y = f(x)$ என்ற வரைபடம் வரைதல் வேண்டும். அந்த வரைகோடு X அச்சினைக் கடக்கும் இடங்களின் மதிப்புகளே, $f(x)=0$-ன் மூலங்களாகும். மாறி x, a, b ($b < a$) என்னும் இரண்டு மதிப்புகளைப் பெறும் பொழுது, சார்பு $f(a)$, $f(b)$ ஆகிய இரு மதிப்புகளைப் பெறுகின்றது. $f(a)$ ம், $f(b)$ ம் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருக்கும் பொழுது $f(x) = 0$ என்கிற சமன்பாட்டிற்கு, a க்கும் b க்கு மிடையே கண்டிப்பாக ஒரு மூலமாவது இருக்கும். ஒன்றுக்கு மேலிருந்தால் அவைகளின்

எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படையில் அமையும். $f(a)$ ம், $f(b)$ ம் ஒரே குறிகளைக் [இரண்டும் (+) நேர் அல்லது இரண்டு எதிர் (−)] கொண்டிருந்தால் a க்கும் b க்கு மிடையே மூலங்கள் இல்லாமலிருக்கலாம். அப்படியிருந்தால் மூலங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையில் அமையும்.

உதாரணமாக $x^2 + x - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டில்

x :	-2	-1	0	1	2
$f(x)$:	$+1$	-1	-1	1	5

$f(-2)$ ம் $f(-1)$ ம் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருப்பதால் இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் -2 க்கும் -1 க்கு மிடையே யுள்ளது. இது போலவே மற்றொரு மூலம் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது.

எண்ணியல் தீர்வு முறையில், சமன்பாடுகளைப் பொருத்துக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள 6 முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி மூலங்களைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும்.

அவைகளாவன :

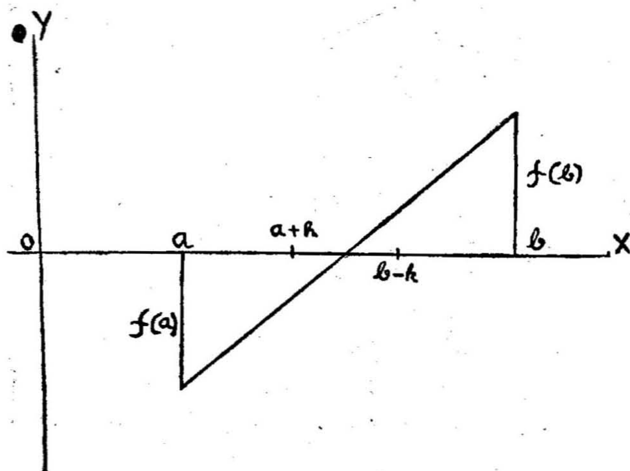
1. திரும்பத்திரும்ப (அடுத்தடுத்து) வரையும் முறை (Repeated Plotting)
2. பிழை நிலை முறை (Method of false Position)
3. நியூட்டன்—ராப்சன் முறை (Newton Raphson Method)
4. தொடர் முறை கணிப்பு (Iteration Process)
5. ஓணரின் முறை (Horner's Method)
6. முப்பாகுபாடு முறை (Trisection Method)

வரைபட அல்லது பட்டறிதல் முறையில் கணக்கிட்ட மூலங்களின் தோராய மதிப்புகளைக் கொண்டு, மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள முறைகளின் ஏதேனும் ஒன்றை உபயோகித்துப் பல தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

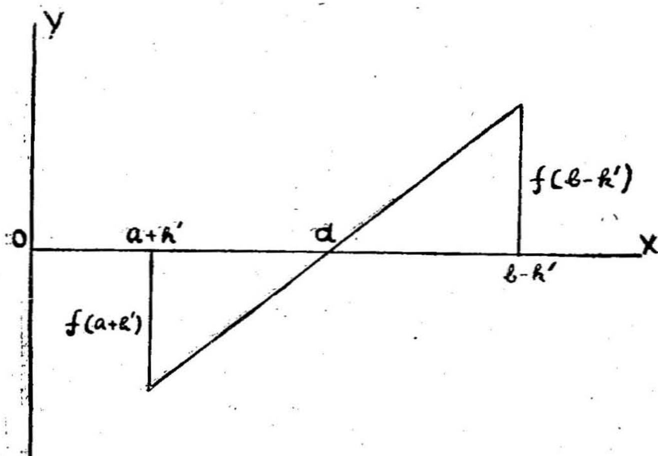
திரும்பத்திரும்ப வரையும் முறை :

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பல தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிட முதலில் $y = f(x)$ என்ற வரைகோடு வரைதல் வேண்டும். இவ்வரை கோடு X அச்சினைக் கடக்கும் இடங்களில் மூலங்கள் உள்ளன. உதாரணமாக a க்கும் b க்கு மிடையில் ஒரு மூலம் இருக்குமானால், $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ என்ற இரண்டு புள்ளிகளை வரைபடத்

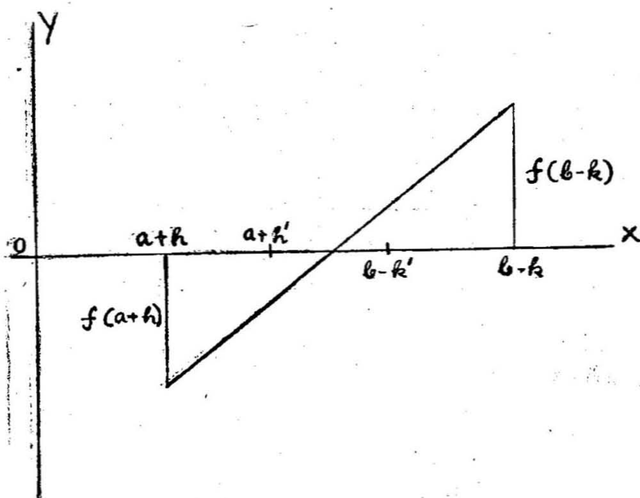
தில் குறித்து இவ்விரண்டையும் நேர் கோட்டால் இணைக்க வேண்டும். a க்கும் b க்கு மிடையேயுள்ள தூரம் குறைவாக இருத்தல் நன்று. (படம் 6-a ஐக் காண்க). அக்கோடு X அச்சினைக் கடக்குமிடத்தில் இருபுறத்திலும் மிக நெருக்கமாக X அச்சில் இரண்டு புள்ளிகளை $(a+h,\ b-k)$ எடுத்து அந்த இடங்களில் $f(x)$ ன் மதிப்புகளைக் காணவேண்டும். $[f(a+h)\ ;\ f(b+k)]$ பிறகு $[(a+h),\ f(a+h)]$, $[(b-k),\ f(b-k)]$ என்னும் இரண்டு புள்ளிகளை இன்னும் பெரிய அளவினை எடுத்துக்கொண்ட வரைதாளில் குறித்து அவைகளை நேர் கோட்டால் இணைக்கவும். $f(a+h)$ ம் $f(b-k)$ ம் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருக்கும். (படம் 6-b ஐக் காண்க). படம் 6-b ல் வரைகோடு $(a+h')$, $(b-k')$ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையில் x அச்சினைக் கடந்து செல்கின்றது. முன்போலவே $(a+h')$, $(b-k')$ ஆகிய இடங்களில் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, $[(a+h'),\ f(a+h')]$ $[(b-k'),\ f(b-k')]$ இவ்விரு புள்ளிகளையும் பெரிய அளவினை எடுத்துக்கொண்ட வரைதாளில் குறித்து, அவைகளை நேர்கோட்டால் இணைக்கவும். படம் 6c-ஐப் பார்க்க. இம் முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்து வரைகோடு X அச்சினைக் கடக்கும் இடத்தின் மதிப்பினைத் தேவையான தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிட வேண்டும். $x = \alpha$ என்ற இடத்தில் படம் 6c–ல்வரைகோடு X அச்சினைக் கடக்கின்றது. எனவே α என்பது ஒரு மூலமாகும். இதுபோலவே இச்சமன்பாட்டின் மற்ற மூலங்களைத் தேவையான தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடலாம்.



படம் 6a



படம் 6b



படம் 6c

எடுத்துக் காட்டு 1 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தை 3 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகத் திரும்பத்திரும்ப வரையும் முறையில் கண்டுபிடிக்க.

$$x^3 - x - 9 = 0.$$

இச் சமன்பாடு மூன்றுவது படியிலிருப்பதால், இதற்கு மூன்று மூலங்கள் இருக்கும். அவைகளில் ஒன்று $x=2$-க்கும் $x=2{\cdot}5$-க்கு மிடையில் உள்ளது. இவ்விரு இடங்களிலும் சார்பின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

x	$f(x) = x^3 - x - 9$
2·0	− 3·000
2·5	4·125

எனவே (2, − 3·0), (2·5, 4·125) இவ்விரு புள்ளிகளையும் வரைதாளில் குறித்து இணைக்கவும். இவ்வரைகோடு $x=2{\cdot}2$-க்கும், $x=2{\cdot}3$ க்கு மிடையே x அச்சினைக் கடந்து செல்கின்றது. அவ்விடங்களில் சார்பின் மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

x	$f(x)$
2·2	− 0·552
2·3	0·867

இவ்விரு புள்ளிகளையும் பெரிய அளவினை எடுத்துக்கொண்ட வரைதாளில் குறித்து, அவைகளை இணைக்கவும். இக்கோடு $x = 2{\cdot}24$ க்கும் $x = 2{\cdot}25$ க்கும் இடையே X அச்சினைக் கடந்து செல்கின்றது. இவ்விரண்டு இடங்களில் சார்பின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடவும்.

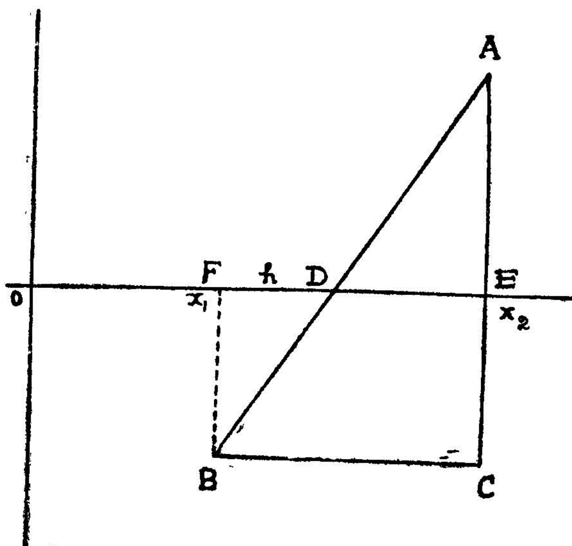
x	$f(x)$
2·24	− 0·0006
2·25	0·1406

இவ்விரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர் கோட்டால் இணைக்க. அக்கோடு $x=2{\cdot}2405$ என்ற இடத்தில் x அச்சினைக் கடந்து செல்கின்றது. எனவே

$x^3 - x - 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் சரியான மதிப்பு $x = 2{\cdot}24003$ என்பதாகும்.

பிழை நிலை முறை.

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலத்தின் தோராய மதிப்பினை வரைபட அல்லது பட்டறிதல் முறையில் முதலில் கணக்கிடவேண்டும். அது x_1 க்கும் x_2 க்கும் $(x_2 > x_1)$ இடையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். $x_1 + h$ என்பது மூலத்தின் சரியான மதிப்பாகக் கொண்டால், h என்பது திருத்த உறுப்பாகும். $y = f(x)$ என்னும் வரைகோடு x_1 க்கும் x_2 க்கும் இடையில் $A = [x_2, f(x_2)]$, $B = [x_1, f(x_1)]$ என்னும் இரண்டு புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு எனக் கருதி h ன் மதிப்பு கணக்கிடப்படுகின்றது. இதனைக் கீழ்க் காணும் (படம் 7) வரைபடத்திலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 7

இப் படத்தில் △BDF, △ BAC இரண்டும் ஒருவொத்த முக்கோணங்களாகும். (Similar Triangles)

எனவே $\dfrac{FD}{FB} = \dfrac{BC}{AC}$ ஆகும்.

$$\therefore\ FD = h = \frac{(FB)(BC)}{AC}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$$\therefore\ x^{(2)} = x_1 + h = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f\,x_2)|}$$

$f(x_1)$ எதிர் எண்ணுக இருப்பினும் நேர் எண்ணுகக் கொள்ள வேண்டும் என்பதனை $|f(x_1)|$ எனக் குறிக்கின்ருேம். இதுபோலவே $x^{(2)}$க்கு நெருக்கமாக இருபுறத்திலும் இரண்டு மதிப்புகளை எடுத்து இம்முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்து தேவையான தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடல் வேண்டும். இதில் $f(x_1)$ம் $f(x_2)$ம் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு : 2.

$x^4 - 12x + 7 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 2க்கும் 3க்கும் இடையே அமைந்துள்ளது. அதனை ஆறு தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடு.

(சென்னை, ஏப்ரல் 1963)

பிழை நிலை முறையில் இந்த மூலத்தின் மதிப்பினை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடலாம். இங்கு $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ என எடுத்துக் கொண்டு $f(2)$, $f(3)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும்.

x	$f(x)$
2	-1
3	52
$x_2 - x_1 = 1$	$53 = |f(x_1)| + |f(x_2)|$

$$\therefore\ x^{(2)} = x_1 + h = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\ |f(x_1)|}{|f(x_2)| + |f(x_1)|}$$

$x^{(2)}$ என்பது இரண்டாவது தோராய மதிப்பாகும்.

$$= 2 + \frac{1 \times |-1|}{53} = 2 + 0{\cdot}01886.$$

$$= \underline{2{\cdot}018}$$

இம்முறையை மேலும் ஒரு தடவை பின்பற்றினால் மூன்றாவது தோராய மதிப்பு கிடைக்கின்றது.

x	$f(x)$
$x_1 = 2{\cdot}018$	$-0{\cdot}6322$
$x_2 = 2{\cdot}050$	$0{\cdot}0510$
$x_2 - x_1 = 0{\cdot}032$	$0{\cdot}6832 = \lvert f(x_1)\rvert + \lvert f(x_2)\rvert$

$$\therefore \quad x^{(3)} = x^{(2)} + h = x^{(2)} + \frac{(x_2 - x_1)\,|f(x_1)|}{|f(x_1)| + |(x_2)|}$$

$$= 2{\cdot}018 + \frac{(0{\cdot}032)\,|-0\ 6322|}{|-0{\cdot}6322| + |0{\cdot}0510|}$$

$$= 2{\cdot}018 + 0{\cdot}0296$$

$$= 2{\cdot}0476$$

இதே முறையில் நான்காவது தோராய மதிப்பினைக் காண்கிறோம்.

x	$f(x)$
$2{\cdot}047$	$-0{\cdot}00623$
$2{\cdot}050$	$+0{\cdot}05100$
$(x_2 - x_1) = 0{\cdot}003$	$0{\cdot}05723$

$$\therefore \quad x^{(4)} = 2{\cdot}0476 + \frac{(0{\cdot}003)\,|-0{\cdot}00623|}{0{\cdot}05723}$$

$$= 2{\cdot}0476 + 0{\cdot}0003265$$

$$x = 2{\cdot}047926$$

எடுத்துக்காட்டு : 3

$x^3 - x - 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டுபிடி.

இம்மூன்றும்படிச் சமன்பாட்டிற்கு 3 மூலங்கள் இருக்கும். அவைகளில் ஒரு நேர் மூலம் 2க்கும் 3க்கும் இடையில் உள்ளது. அதனைப் பிழை நிலை முறையில் 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடலாம்.

முதலாவது தோராயம் :

x	$f(x)$
$x_1 = 2$	-3
$x_2 = 3$	15
$x_2 - x_1 = 1$	$18 = \|f(x_1)\| + \|f(x_2)\|$

$$\therefore \quad x = x_1 + h = \frac{(x_2 - x_1)\,|f(x_1)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$$= 2 + \frac{1 \times 3}{18} = 2{\cdot}166$$

இரண்டாவது தோராயம்.

x	$f(x)$
2·16	−1·083
2·30	+0·867
0·14	1·950

$$\therefore \quad x = 2{\cdot}16 + \frac{(0{\cdot}14)\,(1{\cdot}083)}{1{\cdot}950}$$

$$= 2{\cdot}16 + 0{\cdot}077$$

$$= 2{\cdot}237$$

மூன்ருவது தோராயம்.

x	$f(x)$
2·240	– 0·0006
2·241	0·0135
0·001	0·0141

$$\therefore \quad x = 2{\cdot}240 + \frac{(0{\cdot}001)\,|-0{\cdot}0006\,|}{0{\cdot}0141}$$

$$= 2{\cdot}240 + 0{\cdot}00004$$
$$= 2{\cdot}24004$$

நியூட்டன்-ராப்சன் முறை :

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டில் x_1 என்பது ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பாகக் கொள்வோம். $f(x)$-ன் முதலாவது வகைவேறுபாட்டுக் குணகம் $x = x_1$ என்ற இடத்தில் இருக்குமாயின் இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம். அதாவது $f^1(x_1)$ பூச்சியமாக இருத்தல் கூடாது $(f^1(x) \neq 0)$. அது மட்டுமல்லாமல் இவ்வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தின் மதிப்பு மிக எளிதாகக் கணக்கிடப் படுவதாய் இருத்தல் அவசியம். சமன்பாட்டில், x_1 என்பது மூலத்தின் தோராய மதிப்பாகக் கொண்டால் $(x_1 + h)$ என்பதனைச் சரியான மதிப்பெனக் கொள்ளலாம். அதாவது

$f(x_1+h)=0$ ஆகும். இங்கு h என்பது திருத்த உறுப்பாகும். இச்சமன்பாட்டை டெயிலரின் தேற்றத்தை உபயோகித்துத் தொடராகக் கீழ்காணுமாறு எழுதலாம்.

$$f(x_1+h) = f(x_1) + \frac{h}{1\,!} f^1(x_1) + \frac{h^2}{2\,!} f^{11}(x_1+\theta h)$$

$$= 0$$

இங்கு $(0 \leq \theta \leq 1)$ θ என்பது 0 க்கும் 1 க்கும் இடையிலுள்ள ஒரு எண்ணாகும். $f(x_1 + h) = 0$ என்பதால்

$$f(x_1) + \frac{h}{1!} f^1(x_1) + \frac{h^2}{2!} f''(x_1 + \theta h) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதில் h என்பது மிகவும் சிறியது. எனவே h^2, h^3 ...... ஆகியவைகள் மிக மிகச் சிறியவைகளாக இருக்கும். எனவே அவைகளின் மதிப்பு தோராயமாக 0 என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad f(x_1) + hf^1(x_1) = 0$$

$$\therefore \quad h = -\frac{f(x_1)}{f^1(x_1)}$$

எனவே மூலத்தின் திருத்திய மதிப்பு

$$x_2 = x_1 + h = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)}$$

இச் சமன்பாட்டில் $x_1 = x_2$ எனப் பிரதியிட்டால் மூலத்தின் அடுத்த திருத்திய மதிப்பினைப் பெறலாம்.

அதாவது $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

இம்முறையை மீண்டும் மீண்டும் செய்யச் செய்ய மூலத்தின் சரியான மதிப்பினை அடையலாம்.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$\vdots$$

$$x_{r-1} = x_{r-2} - \frac{f(x_{r-2})}{f'(x_{r-2})}$$

$$x_r = x_{r-1} - \frac{f(x_{r-1})}{f'(x_{r-1})}$$

$x_{r-1} = x_r$ ஆக இருக்கும்பொழுது, $x = x_r$ என்பதே மூலத்தின் சரியான மதிப்பெனக் கொள்ளவேண்டும். மூலத்தின் மதிப்பு தேவையான தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டு பிடிக்கப்படும்வரை, திரும்பத் திரும்ப இம்முறையை உபயோ

கித்தல் வேண்டும். இங்கு $y = f(x)$ என்னும் வரைகோடு, $x = x_1$ என்னுமிடத்தில் செங்குத்தாக x அச்சினைக் கடந்தால் $f'(x_1)$ன் மதிப்புப் பெரியதாகவும் $f(x_1)$ன் மதிப்புச் சிறியதாகவும் இருக்கும். அப்பொழுது hன் மதிப்பு பூச்சியத்தை விரைவாக நெருங்கும். மூலத்தின் சரியான மதிப்பினை இரண்டு மூன்று தோராயங்களிலேயே அடைய இயலும்.

இங்கு $f'(x_1) = 0$ ஆக இருந்தால் $h = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \infty$ ஆகும்.

அப்பொழுது இம்முறையினைப் பின்பற்ற முடியாது; பிழை நிலை முறையை உபயோகிக்கலாம்.

இம்முறையில் சிறிய மாற்றம் செய்வதால் மூலத்தைக் கணக்கிடும் பொழுது எளிதாக இருப்பதனைக் காணலாம். $y = f(x)$ என்னும் வரை கோடு செங்குத்தாக x அச்சினைக் கடக்கும்பொழுது $f'(x_1)$ ன் மதிப்பு மிகுதியானபடியினால் $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'(x_3)$ ...... ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் ஏறத்தாழச் சமமாயிருக்கும். அப்பொழுது நியூட்டன்-ராப்சனின் தோராயங்களாவன :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_1)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$x_{r-1} = x_{r-2} - \frac{f(x_{r-2})}{f'(x_1)}$$

$$x_r = x_{r-1} - \frac{f(x_{r-1})}{f'(x_1)}$$

இம்முறையை உபயோகித்தும் மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு $x = 1{\cdot}6$ ஆகும். இந்த மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குச் சரியாக நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்துக் காண்க. (1963)

நியூட்டனின் முறையாவது

$$x_r = x_{r-1} - \frac{f(x_{r-1})}{f'(x_{r-1})}$$

இதில் $x_r = x_1 = 1{\cdot}6$ எனக் கொண்டு இம்முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்து மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைக் காணலாம்.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4$$

$$\therefore\ f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 8x - 11$$

$$x_1 = 1{\cdot}6$$

$$\therefore\quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 1{\cdot}6 - \frac{f(1{\cdot}6)}{f'(1{\cdot}6)}$$

$$= 1{\cdot}63872$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 1{\cdot}638 - \frac{f(1{\cdot}638)}{f'(1{\cdot}638)}$$

$$= 1{\cdot}6375$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$= 1{\cdot}6375 - \frac{f(1{\cdot}6375)}{f'(1{\cdot}6375)}$$

$$= 1{\cdot}637531$$

$x_3 = x_4$ ஆக இருப்பதால் $x = 1{\cdot}6375$ என்பது மூலத்தின் சரியான மதிப்பெனக் கொள்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

$x^4 - 3x^2 + 25x - 10{,}000 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 9·8 ஆக உள்ளது. நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்து அந்த மூலத்தின் மதிப்பினை 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (1963)

நியூட்டனின் முறையில்

$$x_r = x_{r-1} - \frac{f\ (x_{r-1})}{f'\ (x_{r-1})}$$ என்னும் சூத்திரத்தைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்து மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைப் பெறலாம்

இங்கு $f\ (x) = x^4 - 3x^2 + 25x - 10{,}000$

$$\therefore\ f'\ (x) = 4x^3 - 6x^2 + 25$$

$x_r = x_1 = 9{\cdot}8$ எனக் கொள்ளவும்.

$$x_2 = x_1 - \frac{f\ (x_1)}{f'\ (x_1)}$$

$$= 9{\cdot}8 - \frac{f\ (9{\cdot}8)}{f'\ (9{\cdot}8)}$$

$$= 9{\cdot}8 + 0{\cdot}086$$
$$= 9{\cdot}886$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f\ (x_2)}{f'\ (x_2)}$$

$$= 9{\cdot}886 - \frac{f\ (9{\cdot}886)}{f'\ (9{\cdot}886)}$$

$$= 9{\cdot}8860074$$

$\therefore\ x = 9{\cdot}8860$ என்பதனை மூலத்தின் சரியான மதிப்பெனக் கொள்கின்றோம்.

இருமாறிகளுக்கு நியூட்டன்—ராப்சன் முறை :

இதுவரை ஒரே மாறியில் (x ல்) அமைந்த சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் முறையைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இனி இருமாறிகளில் அமைந்துள்ள சமன்பாடுகளின் மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையைப் பார்ப்போம். இங்கு இரு சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

அவைகளை

$$f_1\ (xy) = 0$$
$$f_2\ (xy) = 0$$

என எடுத்துக் கொண்டால் நியூட்டன் ராப்சன் முறையில் தீர்வுகாண டெயிலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

இங்கு (x_1, y_1) மூலத்தின் தோராய மதிப்பாகக் கொண்டு h, k இரண்டையும் திருத்த உறுப்புக்களாகக் கொண்டால்

$$f_1(x_1 + h, \quad y_1 + k) = 0$$

$$f_2(x_1 + h, \quad y_1 + k) = 0$$

என அமையும்.

டெயில்ரின் தேற்றத்தை உபயோகித்து இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தொடர்களாகக் கீழ்க்காணுமாறு எழுதலாம்.

$$f_1(x_1+h, y_1+k) = 0 = f_1(x_1, y_1) + h\frac{\delta f_1}{\delta x_1} + k\frac{\delta f_1}{\delta y_1} + \ldots\ldots$$

$$f_2(x_1+h, y_1+k) = 0 = f_2(x_1, y_1) + h\frac{\delta f_2}{\delta x_1} + k\frac{\delta f_2}{\delta y_1} + \ldots\ldots$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து h, k ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

$$(8{\cdot}1) \quad f_1(x_1, y_1) + h\frac{\delta f_1}{\delta x_1} + k\frac{\delta f_1}{\delta y_1} = 0$$

$$(8{\cdot}2) \quad f_2(x_1, y_1) + h\frac{\delta f_2}{\delta x_1} + k\frac{\delta f_2}{\delta y_1} = 0$$

(8·1) ஆவது சமன்பாட்டை $\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$ ஆல் பெருக்கவும்.

(8·2) ஆவது சமன்பாட்டை $\frac{\delta f_1}{\delta y_1}$ ஆல் பெருக்கி, பின்னதிலிருந்து முன்னதைக் கழித்தால், h, k ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் கிட்டும்.

$$(8{\cdot}3) \quad h = \frac{f_2(x_1, y_1)\frac{\delta f_1}{\delta y_1} - f_1(x_1, y_1)\frac{\delta f_2}{\delta x_1}}{\frac{\delta f_1}{\delta x_1} \cdot \frac{\delta f_2}{\delta y_1} - \frac{\delta f_1}{\delta y_1} \cdot \frac{\delta f_2}{\delta x_1}}$$

$$(8{\cdot}4) \quad k = \frac{f_1(x_1, y_1)\frac{\delta f_2}{\delta x_1} - f_2(x_1, y_1)\frac{\delta f_1}{\delta x_1}}{\frac{\delta f_1}{\delta x_1} \cdot \frac{\delta f_2}{\delta y_1} - \frac{\delta f_1}{\delta y_1} \cdot \frac{\delta f_3}{\delta x_1}}$$

h, k ஆகியவைகளிரண்டையும் முறையே x_1, y_1 உடன் கூட்டினால் மூலம் தோராய மதிப்பிலிருந்து சரியான மதிப்பை

நெருங்கும். இம்முறையில், $x_1 = x_2$ எனவும் $y_1 = y_2$ எனவும் பிரதியிட்டு திரும்பத்திரும்பச் செய்தால் மிகச் சரியான மதிப்பினை அடையலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்.

$$4 \cdot 2\, x^2 + 8 \cdot 8\, y^2 = 1 \cdot 42$$

$(x - 1 \cdot 2)^2 + (y - 0 \cdot 6)^2 = 1$. மூலத்தின் தோராய மதிப்பு

$$(x_1, y_1) = (0 \cdot 226,\ 0 \cdot 369).$$

இங்கு $f_1 (x, y) = 4 \cdot 2\, x^2 + 8 \cdot 8\, y^2 - 1 \cdot 42 = f_1$

$$f_2 (x, y) = (x - 1 \cdot 2)^2 + (y - 0 \cdot 6)^2 - 1 = f_2$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\frac{\delta f_1}{\delta x} = 8 \cdot 4\, x$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta y} = 17 \cdot 6\, y$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x} = 2\, (x - 1 \cdot 2)$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta y} = 2\, (y - 0 \cdot 6)$$

ஆனல் $x_1 = 0 \cdot 226$
$y_1 = 0 \cdot 369$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad f_1 (0 \cdot 226,\ 0 \cdot 369) = -\ 0 \cdot 0072640$$

$$f_2 (0 \cdot 226,\ 0 \cdot 369) = +\ 0 \cdot 00207$$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வகை வேறுபாட்டுக்குணகங்களைக் கணக்கிடவும்.

$$\left. \frac{\delta f_1}{\delta x_1} \right]_{x_1 = 0 \cdot 226} = 1 \cdot 8984$$

$$\left. \frac{\delta f_2}{\delta x_1} \right]_{x = 0 \cdot 226} = -\ 1 \cdot 948$$

$$\left.\frac{\delta f_1}{\delta y_1}\right]_{y_1=0\cdot369} = 6\cdot4944$$

$$\left.\frac{\delta f_2}{\delta y_1}\right]_{y_1=0\cdot369} = -\ 0\cdot462$$

இம்மதிப்புகளை (8·3), (8·4) ஆகிய சமன்பாடுகளில் பிரதியிட h, k ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

$$h = \frac{f_2(x_1, y_1)\,\dfrac{\delta f_1}{\delta y_1} - f_1(x_1\, y_1)\cdot\dfrac{\delta f_2}{\delta y_1}}{\dfrac{\delta f_1}{\delta x_1}\cdot\dfrac{\delta f_2}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f_1}{\delta y_1}\cdot\dfrac{\delta f_2}{\delta x_1}}$$

$$k = \frac{f_1(x_1, y_1)\,\dfrac{\delta f_2}{\delta x_1} - f_2(x_1\, y_1)\,\dfrac{\delta f_1}{\delta x_1}}{\dfrac{\delta f_1}{\delta x_1}\cdot\dfrac{\delta f_2}{\delta y_1} - \dfrac{\delta f_1}{\delta y_1}\cdot\dfrac{\delta f_2}{\delta x_1}}$$

$$\therefore h = \frac{(0\cdot00207)(6\cdot4944) - (-0\cdot007264)(-0\cdot462)}{(1\cdot8984)(-0\cdot462) - (6\cdot4944)(-1\cdot948)}$$

$$= 0\cdot000987$$

$$k = \frac{(-0\cdot0007264)(-1\cdot948) - (0\cdot00207)(-0\cdot462)}{(1\cdot8984)(-0\cdot462) - (6\cdot4944)(-1\cdot948)}$$

$$= 0\cdot00084$$

$$\therefore \quad x_2 = x_1 + h = 0\cdot22698$$

$$y_2 = y_1 + k = 0\cdot36984$$

$$\therefore \quad (x_2, y_2) = (0\cdot22698,\ 0\cdot36984)$$

என்பது திருத்தப்பட்டுள்ள மூலத்தின் மதிப்பாகும். மேலே யுள்ள சமன்பாடுகளில் (x_1, y_1) க்குப் பதிலாக (x_2, y_2) எனப் பிரதியிட்டு இரண்டாவது தோராய மதிப்பினைக் காணலாம்.

$$\therefore \quad f_1(x_2, y_2) = 0\cdot0000475$$

$$f_2(x_2, y_2) = -0\cdot0002584$$

வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களாவன :

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_2} = 1{\cdot}906632$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta y_2} = 6{\cdot}509184$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_2} = -1{\cdot}94604$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta y_2} = -0{\cdot}46032$$

இம் மதிப்புகளை (8·3), (8·4) இரு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட h, k ஆகியவைகளின் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

அவைகளாவன. $h = -0{\cdot}0001409$

$k = -0{\cdot}0000505$

$$\therefore \quad x_3 = x_2 + h = 0{\cdot}2268461$$

$$y_3 = y_2 + k = 0{\cdot}3697895$$

$$\therefore \quad (x_3, y_3) = (0{\cdot}2268461,\ 0{\cdot}3697895)$$

என்பதனை, சார்புகளின் ஒரு மூலத்தின் சரியான மதிப்பெனக் கொள்ளலாம்.

இன்னும் அதிக தசம இடங்களுக்குச் சரியாக மூலத்தைக் காண, இம்முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்ய வேண்டும்.

தொடர் கணிப்பு முறை :

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $x = F(x)$ என எழுத முடியுமானுல் இம்முறையைப் பயன்படுத்தி மூலங்களை மதிப்பிடலாம். மேலும் $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு x_1 என்பது மூலத்தின் தோராய மதிப்பாக இருக்குமானுல்

$|F^1(x_1)| < 1$ ஆக இருத்தல் அவசியம்.

அப்பொழுதுதான் மூலத்தின் மிகச் சரியான மதிப்பினைத் தோராய மதிப்பு ஒருங்கும்.

இம் முறையில் x_1 என்பது தோராய மதிப்பாக இருந்தால் அதன் அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகளாவன :

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1) \\ x_3 &= F(x_2) \\ x_4 &= F(x_3) \\ &\vdots \\ x_{r-1} &= F(x_{r-2}) \\ x_r &= F(x_{r-1}) \end{aligned}$$

x_{r-1} ம் x_r ம் சமமாகும் வரை இம்முறையைத் தொடர்தல் வேண்டும்.

சமன்பாடு முடிவிலாத் தொடராக இருக்கும்பொழுது $f(x) = 0$ என்னும் தொடரை

$x = F(x)$ என எழுத இயலும்பொழுது இம்முறையை உபயோகித்து மூலத்தைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x^3 - 2x + 0{\cdot}5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் சிறிய நேர் மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

இச்சமன்பாட்டின் நேர்மூலம் 0க்கும் 1க்கு மிடையில் உள்ளது என்பதனைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்,

x	$f(x) = x^3 - 2x + 0{\cdot}5$
0	$+\,0{\cdot}5$
$+1$	$-\,0{\cdot}5$

$x^3 - 2x + 0{\cdot}5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை

$x = \frac{1}{2}(x^3 + 0{\cdot}5) = F(x)$ என எழுதலாம்.

மூலத்தின் தோராய மதிப்பு $x = 0{\cdot}5$ எனக் கொண்டால்

$|F^1(0{\cdot}5)| < 1$ ஆக உள்ளது.

எனவே தொடர் முறையை உபயோகிக்கலாம்.

அப்பொழுது அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகளாவன:

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1) = \tfrac{1}{2}[(0{\cdot}5)^3 + 0{\cdot}5] = 0{\cdot}3 \\ x_3 &= F(x_2) = \tfrac{1}{2}[0{\cdot}3^3 + 0.5] = 0{\cdot}26 \\ x_4 &= F(x_3) = \tfrac{1}{2}[0{\cdot}26^3 + 0{\cdot}5] = 0{\cdot}259 \\ x_5 &= F(x_4) = \tfrac{1}{2}[0{\cdot}259^3 + 0{\cdot}5] = 0{\cdot}2587 \\ x_6 &= F(x_5) = \tfrac{1}{2}[0{\cdot}2587^3 + 0{\cdot}5] = 0{\cdot}25865 \end{aligned}$$

$\therefore\ x = 0{\cdot}25865$ என்பதனை இச்சமன்பாட்டின் சிறிய நேர் மூலமாக எடுத்துக் கொள்கின்றோம்.

முறை 2 : மற்றொரு விதத்திலும் இதே முறையில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கலாம்.

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினை $f_1(x) = f_2(x)$ எனப் பகுக்க இயலுமானால்,

$y_1 = f_1(x)$

$y_2 = f_2(x)$ என இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இச்சமன்பாடுகளின் வரை கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியில் x அச்சுத்தூரமே (கிடைதூரம்) $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$x^3 - 2x + 0{\cdot}5$ என்னும் சமன்பாட்டினை

$x^3 = 2x - 0{\cdot}5$ என எழுதலாம். அப்பொழுது $y = x^3$, $y = 2x - 0{\cdot}5$ என்னும் சமன்பாட்டின் வேறுபாடுகள் தோராயமாக $x = 0{\cdot}5$ என்னுமிடத்தில் வெட்டிக் கொள்வதாகக் கொள்வோம். வெட்டிக் கொள்ளுமிடத்தில் இரு சமன்பாடுகளின் மதிப்பும் ஒன்றாக இருக்கும்.

$x_1 = 0{\cdot}5$

$x = (y + 0{\cdot}5)\frac{1}{2}$	$y = x^3$
$x_1 = 0{\cdot}5$	$y = 0{\cdot}125$
$x_2 = 0{\cdot}3$	$y = 0{\cdot}027$
$x_3 = 0{\cdot}26$	$y = 0{\cdot}01757$
$x_4 = 0{\cdot}259$	$y = 0{\cdot}017374$
$x_5 = 0{\cdot}2587$	$y = 0{\cdot}01713676003$
$x_6 = 0{\cdot}25865$	

$x = 0{\cdot}25865$ என்பதனை மூலத்தின் மதிப்பாக இருப்பதனைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

கீழ்க்காணும் முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$1 - x + \frac{x^2}{(2\,!)^2} - \frac{x^3}{(3\,!)^2} + \frac{x^4}{(4\,!)^2} - \cdots\cdots = 0$$

மூலத்தைக் காண்க.

இச்சமன் பாட்டினை

$$x = F(x) = 1 - \frac{x^2}{(2\,!)^2} + \frac{x^3}{(3\,!)^2} - \frac{x^4}{(4\,!)^2} + \ldots\ldots$$

என எழுதலாம். இம்மூலத்தின் தோராய மதிப்பினை $x = 1$ எனக் கொள்ளலாம். அப்பொழுது முதலாவது வகை வேறுபாடானது

$$F'(x) = -\frac{2x}{(2\,!)^2} + \frac{3x^2}{(3\,!)^2} - \frac{4x^3}{(4\,!)^2} + \ldots\ldots$$

இதில் $x = x_1 = 1$ என மதிப்பிட

$|F'(x_1)| = |F'(1)| < 1$ ஆக உள்ளது. எனவே தொடர் முறையில் மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைப் பெறலாம். அடுத்தடுத்த தோராய மதிப்புகளாவன :

$x_1 = 1$

$$x_2 = F(x_1) = F(1) = 1 + \frac{1^2}{(2\,!)^2} - \frac{1^3}{(3\,!)^2} + \frac{1^4}{(4\,!)^2} - \ldots\ldots = 1{\cdot}223$$

$$x_3 = F(x_2) = F(1{\cdot}22) = 1 + \frac{1{\cdot}22^2}{(2\,!)^2} - \frac{(1{\cdot}22)^3}{(3\,!)^2} + \frac{(1{\cdot}22)^4}{(4\,!)^2} - \ldots\ldots = 1{\cdot}3239$$

$$x_4 = F(x_3) = F(1{\cdot}3239) = 1 + \frac{(1{\cdot}3239)^2}{(2\,!)^2} - \frac{(1{\cdot}3239)^3}{(3\,!)^2} + \frac{(1{\cdot}3239)^4}{(4!)^2} - \ldots\ldots = 1{\cdot}3792171$$

$$x_5 = F(x_5) = F(1{\cdot}3792) = 1 + \frac{1{\cdot}3792^2}{(2\,!)^2} - \frac{1{\cdot}3792^3}{(3\,!)^2} + \frac{1{\cdot}3792^4}{(4\,!)^2} - \ldots\ldots = 1{\cdot}44575$$

∴ இம்முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டின் மூலத்தின் மதிப்பு 1·44575 ஆகும்.

ஒணரின் முறை (Horner's Method).

$f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் மதிப்பு 2·95201 என வைத்துக்கொள்வோம். இம் மூலத்தின் முழு எண்ணுகிய 2-ஐ முதலிலும் அடுத்து தசம இடங்களான 9-னையும், 5-யும், 2-யும் 0-யும் 1-யும் தனித்தனியாக ஒவ்வொன்ருகக் கணக்கிடும் முறையே ஒணரின் முறையாகும். $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் 2-ஆல்

குறைக்கின்ரேம். இப்பொழுது புதிய சமன்பாடு கிடைக்கின்றது. அதன் இந்த மூலத்தின் மதிப்பு $x = 0 \cdot 95201$ ஆக இருக்கும். இப்பொழுது இப்புதிய சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 0·9-ஐக் குறைக்கின்ரேம். 0·9-ஐக் குறைப்பதற்குப் பதிலாக, இப்புதிய சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கிய பிறகு 9-ஐக் குறைக்கவும். இப்பொழுது ஒரு புதிய சமன்பாட்டைப் பெறுகின்ரேம். இந்தச் சமன்பாட்டில் இம் மூலத்தின் மதிப்பு $x = 0 \cdot 5201$ ஆகும். இச் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் 0·5 ஆல் குறைப்பதற்குப் பதிலாக, இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கிய பின்னர் 2·ஆல் குறைக்கப்படுகின்றன. இதுபோல ஒரு மூலத்தின் ஒவ்வொரு இலக்கமாகக் கணக்கிடப்படுகின்றது. ஒரு மூலம் 2·க்கும் 3-க்கும் இடையில் இருந்தால் எல்லா மூலங்களையும் 2-ஆல் குறைக்கவும். அடுத்த இலக்கம் 9-க்கும் 10-க்கும் இடையிலிருப்பதால் எல்லா மூலங்களையும் 9-ஆல் குறைக்கவும். இதே முறையில் வேண்டிய தசம இடங்களுக்குச் சரியாக மூலத்தைக் கணக்கிடலாம்.

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களாவன. $x = 5$, $x = 1$.

ஆனல் இதே சமன்பாட்டின் மூலங்களை வேருெரு எண்ணல் குறைத்த பிறகு கிடைக்கின்ற புதிய சமன்பாட்டைத் தீர்த்து வருகின்ற மூலங்களுடன், குறைக்கப்பட்டுள்ள எண்களுடன் கூட்டினல் இதே மூலங்களைப் பெறுகின்ரேம்:

டெயிலரின் தேற்றப்படி

$$f(x+3) = f(3) + \frac{x}{1!} \cdot f'(3) + \frac{x^2}{2!} f''(3) = 0$$

(அதாவது மூலங்களை 3-ஆல் குறைக்க)

$$= x^2 - 4 = 0$$

$$= (x-2)(x+2) = 0$$

எனவே, 3-ஆல் மூலங்கள் குறைக்கப்பட்ட பிறகு புதிய சமன்பாடானது $x^2 - 4 = 0$ ஆகும். இதன் இருமூலங்களாவன: $x = +2, x = -2$. இவைகளைக் குறைக்கப்பட்டுள்ள எண்ணுடன் கூட்ட, $x_1 = 2 + 3 = 5$, $x_2 = -2 + 3 = 1$. இவையிரண்டும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இதேபோல் ஓணரின் முறையில் ஒவ்வொரு இலக்கங்களாக-தசம இடங்களாக மூலங்களிலிருந்து குறைக்கப்பட்டு, பிறகு கூட்டி மூலத்தைப் பெறுகின்ரேம்.

மூலங்களிலிருந்து ஒரு எண்ணால் குறைக்கப்படுவதனைக் காண்போம்.

ஒரு நான்காம் படிச் சமன்பாட்டைக் கவனிப்போம்.

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒவ்வொன்றினையும் h-ஆல் குறைக்கவும். இக் குறைக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களையுடைய சமன்பாட்டினைக் காண வேண்டும். அதனை டெயிலரின் தேற்றத்தை உபயோகித்துப் பெறலாம்.

$$(8\cdot5)\ f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1\,!} f'(h) + \frac{x^2}{2\,!} f''(h) + \frac{x^3}{3\,!} f'''(h) + \frac{x^4}{4\,!} f^{iv}(x) + \ldots\ldots = 0.$$

எனவே இப்புதிய சமன்பாட்டினைத்தீர்த்து h உடன் கூட்டி மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைப் பெறலாம்.

மூலங்களை h-ஆல் குறைக்க கீழ்க்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

h	A	B	C	D	E
	O	Ah	Fh	Gh	Hh
h	A	F	G	H	α
	O	Ah	Ih	Jh	
h	A	I	J	β	
	O	Ah	Kh		
h	A	K	γ		
	O	Ah			
	A	δ			

இங்கு $F = B + Ah$

$G = C + Fh \ldots\ldots$

எனவே h–ஆல் குறைக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களையுடைய புதிய சமன்பாடானது :

(8·6) $Ax^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ இது (8·5) வது சமன்பாட்டிற்குச் சமம். ஏனெனில்

$$\alpha = f(h) = Ah^4 + Bh^3 + Ch^2 + Dh + E$$

$$\beta = \frac{f'(h)}{1!} = 4\,Ah^3 + 3\,Bh^2 + 2\,Ch + D$$

$$\gamma = \frac{f''(h)}{2!} = 6\,Ah^2 + 3\,Bh + C$$

$$\delta = \frac{f'''(h)}{3!} = 4\,Ah + B$$

$$A = \frac{f^{iv}(h)}{4!} = A$$

எனவே (8·6) ஆவது சமன்பாட்டைத்தீர்த்துப் புதிய மூலங்களைப் பெற்று (திருத்தங்கள்) h உடன் கூட்டி மூலங்களின் சரியான மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

தேற்றம் : $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ஆகியவைகள் $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் n மூலங்களானுல், $cx_1, cx_2 \ldots\ldots cx_n$, $x^n + a_1\, cx^{n-1} + a_2\, c^2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n\, c^n = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

நிரூபணம் : $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்பன $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots a_n = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எனக் கொண்டால்

$$x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \ldots\ldots a_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)$$

என எழுதலாம்.

$x = \frac{y}{c}$ என மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\frac{y^n}{c^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{c^{n-1}} + a_2 \frac{y^{n-2}}{c^{n-2}} + \ldots\ldots a_n =$$

$$\left(\frac{y}{c} - x_1\right)\left(\frac{y}{c} - x_2\right) \ldots\ldots \left(\frac{y}{c} - x_n\right)$$

இரு பக்கங்களையும் c^n ஆல் பெருக்கவும்.

$$y^n + a_1 c\, y^{n-1} + a_2 c^2 y^{n-2} + \ldots\ldots a_n c^n = (y - cx_1)(y - cx_2) \ldots\ldots (y - cx_n)$$

$$(i.e.)\ \ x^n + a_1 c\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} \,.\, c^2 + \ldots\ldots + c^n a_n = (x - cx_1)(x - cx_2) \ldots\ldots (x - cx_n)$$

$\therefore\ \ x^n + a_1\, c\, x^{n-1} + a_2 c^2\, x^{n-2} + \ldots\ldots c^n a^n = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாவன

$$cx_1,\ cx_2 \ldots\ldots c_n x_n$$

மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்க இம் முறையைப் பின்பற்றுகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$x^3 - x - 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தை ஆறு தசம இடங்களுக்குச் சுத்தமாகக் காண்க.

இந்தச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று மூலங்கள் உள்ளன. ஒரு மூலம் 2 க்கும் 3 க்கும் இடையே உள்ளது. அதனை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக ஓணரின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். முதலில் இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 2 ஆல் குறைக்கவும். அதற்காக அச் சமன்பாட்டின் குணகங்களைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

2	1	0	−1	−9
	0	2	4	6
2	1	2	3	−3
	0	2	8	
2	1	4	11	
	0	2		
	1	6		

எனவே 2 ஆல் குறைக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களையுடைய சமன்பாடானது ;

$$x^3+6x^2+11x-3=0$$

அதாவது இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் மதிப்புகளை விட 2 குறைந்திருக்கும். இப்புதிய சமன்பாட்டின் மூலம் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் உள்ளது. அதாவது 0·2 க்கும் 0·3 க்கு மிடையில் உள்ளது. எனவே இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கினல், இம் மூலம் 2 க்கும் 3 க்கும் இடையில் இருக்கும்.

$$x^3+60x^2+1100x-3000=0$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 2 ஐக் குறைக்கவும்.

2	1	60	1100	−3000
	0	2	124	2448
2	1	62	1224	−552
	0	2	128	
2	1	64	1352	
	0	2		
	1	66		

எனவே புதிய சமன்பாடானது $x^3+66x^2+1352x-552=0$

இச் சமன்பாட்டின் மூலம் 0·4 க்கும் 0·5 க்கு மிடையில் உள்ளது. எனவே மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கி, அவைகளிலிருந்து 4 ஐக் குறைக்கவும்.

$$x^3+660\,x^2+135200\,x-552000=0.$$

4	1	660	135200	−552000
	0	4	2656	551424
4	1	664	137856	−576
	0	4	2672	
4	1	668	140528	
	0	4		
	1	672		

எனவே புதிய சமன்பாடானது

$$x^3+672\,x^2+140528\,x-576=0$$

இப்பொழுது, இச் சமன்பாட்டின் இறுதி இரு உறுப்புக்களை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டு மூலத்தின் தோராய மதிப்பினைக் காணவேண்டும். அப்பொழுது

$$140528\,x-576=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{576}{140528}=0\cdot004101$$

$\therefore$ மூலத்தின் சரியான மதிப்பாவது

$$x=\underline{2\cdot240041}$$

இதே முறையில் மற்ற மூலங்களின் மதிப்புகளையும் ஒவ்வொரு இலக்கமாகக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$x^3-2x-5=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 2 க்கும் 3 க்கும் இடையில் உள்ளது. ஓணரின் முறையை உபயோகித்து 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடு.

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 2 ஆல் குறைக்கவும்

2	1	0	−2	−5
	0	2	4	4
2	1	2	2	−1
	0	2	8	
2	1	4	10	
	0	2		
	1	6		

எனவே புதிய சமன்பாடானது $x^3+6x^2+10x-1=0$. இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கவும்.

$x^3+60x^2+1000x-1000=0$. இதன் மூலம் 0 க்கும் 1 க்கும் இடையில் உள்ளது. எனவே மூலங்களை மீண்டும் 10 ஆல் பெருக்கவும்.

$$x^3+600x^2+100000x-1000{,}000=0$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலத்தின் மதிப்பு 9 க்கும் 10 க்கும் இடையில் உள்ளது.

எனவே இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 9-ஆல் குறைக்கவும்.

9	1	600	100000	– 1000000
	0	9	5481	949329
9	1	609	105481	– 50671
	0	9	5562	
9	1	618	111043	
	0	9		
	1	627		

எனவே மாற்றப்பட்ட சமன்பாடானது,

$$x^3+627x^2+111043x-50671=0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை 10-ஆல் பெருக்கவும்.

$$x^3+6270x^2+11104300x-50671000=0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலம் 4-க்கும் 5-க்கும் இடையில் இருப்பதால், மூலங்களை 4-ஆல் குறைக்கவும்.

4	1	6270	11104300	– 50671000
	0	4	25096	44517584
4	1	6274	11129396	– 6153416
	0	4	25112	
4	1	6278	11154508	
	0	4		
	1	6282		

எனவே மாற்றப்பட்ட சமன்பாடானது

$$x^3+6282x^2+11154508x-6153416=0$$

இப்பொழுது தோராய மதிப்பினைக் கணக்கிடுகின்றோம்.

$$11154508x-6153416=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{6153416}{1154508}=0{\cdot}55148$$

∴ மூலத்தின் சரியான மதிப்பு $x=\underline{2{\cdot}09455148}$ என்பது ஆகும்.

முக்கியமான குறிப்பு :

1. இம்முறையில் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்பொழுது உயர்ந்த படியிலுள்ள உறுப்பின் குணகம் 1 ஆக இருத்தல் அவசியம். அப்படி இல்லாவிடின், அவ்வுயர்ந்த படியிலுள்ள உறுப்பின் குணகத்தால் எல்லா உறுப்புக்களையும் வகுத்து 1 ஆக மாற்றவேண்டும்.

2. எதிர்மூலத்தைக் கணக்கிடும்பொழுது $f(x)=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் $x=-x$ எனப் பிரதியிடவும்.

∴ $f(-x)=0$. இச் சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை ஓணரின் முறையில் கணக்கிட்டு, இறுதியாக மூலத்திற்கு எதிர் குறியினைச் சேர்க்கவும்.

முப்பாகுபாடு முறை : (Trisection Method).

$x^3-ax-b=0$ என்னும் மூன்றும்படி பொதுச் சமன்பாட்டில்

1. $27b^2<4a^3$ ஆக இருக்கும் பொழுது இச்சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய் மூலங்கள் உள்ளன. அவைகளாவன :

$$x_1=2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2}\cos\theta$$

$$x_2=-2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2}\cos\frac{\pi-\theta}{3}$$

$$x_3=-2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2}\cos\frac{\pi+\theta}{3}$$

இங்கு $\cos\theta = \left(\frac{3}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{b}{2}$. இதிலிருந்து θ-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

2. $27b^2 > 4a^3$ ஆக இருக்கும்பொழுது இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய்மூலமும், மற்ற இரண்டு கலப்பு (complex roots) மூலங்களும் உண்டு. மெய்மூலமாவது

$$x_1 = \left[\frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2}b - \left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $(x - x_1)$ ஆல் வகுக்க ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். அதனைத் தீர்த்து மற்ற இரண்டு கலப்பு மூலங்களையும் பெறலாம்.

இம்முப்பாகுபாட்டு முறைக்கு திரிகோண மிதி முறை (Trignometric Method) என்ற பெயரும் உண்டு.

எடுத்துக் காட்டு 12:

தீர்: $x^3 - 3x - 1 = 0.$

இச் சமன்பாட்டில் $a=3$, $b=1$ ஆக உள்ளன. மேலும் $27b^2 < 4a^3$. (i.e., $27\times1^2 < 4\times3^3$). ஆகவே இச் சமன்பாட்டுக்கு 3 மெய் மூலங்கள் உள்ளன. இப்பொழுது θ-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\cos\theta = \left(\frac{3}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{b}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{3}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

a, *b*, θ ஆகியவைகளுக்கு மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் பிரதியிடவும்.

$$x_1 = 2 \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^{1/2} \cos\frac{\theta}{3}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{3}{3}\right)^{1/2} \cos 20°$$

$$= \underline{1{\cdot}9774}$$

$$x_2 = -2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/2} \cos\frac{\pi-\theta}{3}$$

$$= -2\left(\frac{3}{3}\right)^{1/2} \cos\frac{\pi-60}{3}$$

$$= -1{\cdot}5320$$

$$x_3 = -2\left(\frac{a}{3}\right)^{1/3} \cos\frac{\pi+\theta}{3}$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \cos\frac{\pi+60}{3}$$

$$= -0{\cdot}3472$$

∴ இச் சமன்பாட்டின் 3 மூலங்களாவன:

$x_1 = 1{\cdot}9774$

$x_2 = -1{\cdot}5320$

$x_3 = -0{\cdot}3472$

எடுத்துக் காட்டு 13 :

தீர்: $x^3 + 3x - 35 = 0.$

இதில் $a = -3$, $b = 35$. மேலும் $27b^2 > 4a^3$ ஆக இருப்பதால் இச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய் மூலமும் இரண்டு கலப்பு மூலங்களும் உள்ளன.

மெய் மூலத்தைக்காண உதவும் சூத்திரமாவது:

$$x = \left[\frac{1}{2}b + \left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2}b - \left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

$$= [17{\cdot}5+(306{\cdot}25+1)^{1/2}]^{1/3} + [17{\cdot}5-(306{\cdot}5+1)^{1/2}]^{1/3}$$

$$= 3{\cdot}272 - 0{\cdot}303$$

$$x = 2{\cdot}969$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $(x - 2{\cdot}969)$ ஆல் வகுக்க, ஈவு இரண்டாம் படிச் சமன்பாடாக இருக்கும். அதனைத்தீர்த்து மற்ற இரண்டு மூலங்களையும் கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 8

1. $x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் மதிப்பு 2 க்கும் 3 க்கு மிடையில் உள்ளது. நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்து அதனை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கணக்கிடு. (1960)

2. $e^x = 4x$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 2 எனக்காட்டு. நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்து அதனை 3 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (1967)

3. $f(x, y) = 0$

$g(x, y) = 0$

என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களைச் சரியாகக் கணக்கிட உபயோகிக்கும் நியூட்டனின் பொதுவான முறையினை விளக்குக.

$$x^3 + 2y^3 = 1$$

$$5y^3 + x^2 - 2xy = 4$$

இதன் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு

$(x, y) = (-0{\cdot}6494,\ 0{\cdot}7981)$ என்பதாகும்.

ஒரு முறை நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்து மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைக் காண்க. (1961)

4. $x^x + 5x = 1000$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தை நான்கு இலக்கங்களுக்குச் சரியாகத் தொடர் முறையை உபயோகித்துக் காண்க. (1961)

5. $x^4 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எதிர் மூலத்தை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (1963)

6. $x^4 - 12x + 7 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 2 க்கும் 3 க்கும் இடையில் உள்ளது. அதனை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (1963)

7. $x^4 - 2x - 11{\cdot}9 = 0$. இச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தோராய மதிப்பு 2 ஆக உள்ளது. சரியான ஒரு முறையில் 3 முறை அடுத்தடுத்துத் தொடர்ந்து செய்து மூலத்தைச் சரியாகக் காண்க. (1967)

8. $2x - \cot x = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலத்தை 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டுபிடி.

9. 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக இச்சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தைக் காண்க.

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 11 = 0.$$

10. ஓணரின் முறையை உபயோகித்துக் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மூலத்தை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

$$x^5 - 0{\cdot}346284\, x^4 + x^3 + 3{\cdot}762848\, x + 10 = 0.$$

(1960)

11. $x^4 - 3x^3 + 75x - 10{,}000 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்களின் தோராய மதிப்புகளைக் காண். பிறகு ஓணரின் முறையை உபயோகித்து ஏதாவது ஒரு மூலத்தை நான்கு தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

12. ஓணரின் முறையை உபயோகித்து

$$4x^3 - 13x^2 - 31x - 275 = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் மூலத்தை (6 க்கும் 7 க்கும் இடையில் உள்ள) 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க. (1963)

13. $10x^3 - 15x + 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 1 க்கும் 2 க்கும் இடையே உள்ளது. ஓணரின் மாற்றங் களை 3 முறை செய்து, அம் மூலத்தை 3 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டுபிடி. (1965)

14. கீழே உள்ள முடிவிலாத் தொடர் சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்.

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} + \ldots\ldots = 0{\cdot}4431135$$

15. இச் சமன்பாட்டினைத் தீர் :

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

16. $2x - \log_{10} x = 7$ இச் சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் காண்க.

17. $x^3 - 9x^2 + 23x - 14 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் 4 க்கும் 5 க்கும் இடையில் உள்ளது. 3 முறை ஒணரின் மாற்றங்களைச் செய்தபிறகு தோராயமாக்கி அம்மூலத்தின் சரியான மதிப்பினைக்காண்.

18. ஒணரின் மாற்றங்களை 3 முறை செய்து அதன் பின் தோராயமாக்கி $x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தைக் காண்.

19. ஒணரின் முறையை உபயோகித்துக் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் மிகச்சிறிய நேர் மூலத்தைக் காண்.

$$x^3 - 4x^2 + 5 = 0.$$

20. ஒணரின் முறையை உபயோகித்து இச் சமன் பாட்டைத் தீர்.

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 631064798 = 0$$

21. திரும்பத்திரும்ப வரைந்து இச் சமன்பாட்டின் நேர் மூலத்தைக் காண்.

$$x - \cos\left(\frac{0{\cdot}7854 - x\sqrt{x^2 - 1}}{1 - 2x^2}\right) = 0$$

22. நியூட்டனின் முறையை உபயோகித்து இச் சமன் பாட்டின் மெய் மூலத்தைக் கண்டுபிடி.

$$3x - \cos x - 1 = 0.$$

23. $x^3 - 9{\cdot}15\,x - 3{\cdot}26 = 0$ ன் மெய் மூலத்தைக் காண்க.

9. எண்சார் வகை வேறுபாடு காணல்

(Numerical Differentiation)

அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட சார்பின் வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறைக்கு 'எண்சார் வகை வேறுபாடு காணல்' என்று பெயர். வகை நுண்ணியற் கணக்கில் சார்புகள் கொடுக்கப்படும். அவைகளின் அமைப்பினை நாம் அறிவதால், தேவையான படிக்கு வகைப்படுத்தி, மாறிக்கு மதிப்பிட்டு, வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கணிக்க இயலும்.

உதாரணங்களாக $f(x) = x^n$, $f(x) = e^{mx}$ போன்ற சார்பின், $x = 2$ என்னுமிடத்தில் வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களாவன:

(1) $f'(x)\Big]_{x=2} = nx^{n-1}\Big]_{x=2} = n \, . \, 2^{n-1}$

(2) $f'(x)\Big]_{x=2} = me^{mx}\Big]_{x=2} = me^{2m}$

எனவே சார்பினை வகைப்படுத்தி மாறிக்கு மதிப்பிட்டு வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைப் பெறுகின்றோம். ஆனால் எண்சார் வகை வேறுபாட்டு முறையில், சார்புகளின் அமைப்பு தெரியாது (functional form). ஆனால் அச்சார்பின் மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அல்லது அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும். இன்னணம் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பின் வகை வேறுபாடுகளைக் கணிப்பது எண்ணியல் வகை வேறுபாடு காணல் என்று அழைக்கப்படுகின்றது.

அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்புகளை, இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை உபயோகித்து மதிப்பிடுகின்றோம். சார்புகளைச் சரியாக மதிப்பிட்டால் வகையீட்டுக் குணகங்களையும் சரியாகக் கணக்கிட இயலும். சார்புகள் சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருந்தால், நியூட்டன், காஸ், ஸ்டெர்லிங், பெஸ்ஸல், எவெரெட் ஆகியவர்களின் சூத்திரங்களை உபயோகித்துச் சார்புகளை மதிப்பிட வேண்டும். சார்புகள் அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருந்தால், இலக்ரான்ஜ், நியூட்டன் (வகுபட்ட வேறுபாடுகள்) ஆகியவர்களின் இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை உபயோகித்து, அவைகளின் அமைப்பைப் பெற வேண்டும். சார்புகளை மதிப்பிட்ட பிறகு வகை வேறுபாடுகளைத் தேவையான படிக்குக் கணக்கிட்டு, x க்கு மதிப்பிட்டு வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைப் பெறலாம். ஆனால் சார்பினை மதிப்பிட உபயோகிக்கும் சூத்திரத்தை வகைப் படுத்தி மாறி xக்கும், $f(x)$ க்கும் மதிப்பிட்டு, வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைப் பெறுவது எளிது. எனவே வகை வேறுபாடு காணவேண்டிய இடம், அதாவது x இன் மதிப்பு அட்டவணையின் முதலில் இருந்தால், நியூட்டனின் முன்னணி வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வகைப்படுத்தி, மாறிக்கு மதிப்பிட்டு வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்கின்றோம். மாறியின் மதிப்பு அட்டவணையின் மத்தியில் இருந்தால் மைய வேறுபாடுகள் இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை வகைப்படுத்தி மாறிக்கும் சார்பினுக்கும் பிரதியிட்டும், மாறியின் மதிப்பு அட்டவணையின் இறுதியில் இருந்தால், நியூட்டனின் பின்னணி வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வகைப்படுத்தி, மாறிக்கும், சார்பினுக்கும் மதிப்பிட்டும் வகையீட்டுக் குணகங்களை அடைதல் வேண்டும். சார்புகள் அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருக்கும் பொழுது, நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வகைப்படுத்தி மாறிக்கு மதிப்பிட்டு, வகையீட்டுக் குணகத்தை அடையலாம். இன்னணம் வெவ்வேறு இடங்களில் சரியான சூத்திரத்தை உபயோகிக்க மேற்கூறிய முறை, வகையீட்டுக் குணகங்களின் சரியான மதிப்பினைப் பெற வழி செய்யும்.

நியூட்டனின் முன்னணி வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து, எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பெறும் முறையைப் பார்ப்போம். சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$
$a+4h$	$f(a+4h)$
$a+5h$	$f(a+5h)$
$a+6h$	$f(a+6h)$

நியூட்டனின் முன்னணி வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$(9 \cdot 1) \quad f(a+xh) = f(a) + x \triangle f(a) + \frac{x(x-1)}{2!} \triangle^2 f(a) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \triangle^3 f(a) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \triangle^4 f(a) + \ldots\ldots$$

இச் சமன்பாட்டை ஒரு முறை x ஐப் பொறுத்து வகைப் படுத்தும்பொழுது, $(a+xh)$ என்னுமிடத்தில் முதலாவது வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரத்தைப் பெறுகின்றோம்.

$$(9 \cdot 2) \quad h \, . \, f'(a+xh) = \triangle f(a) + \frac{2x-1}{2} \triangle^2 f(a) + \frac{3x^2-6x+2}{6} \triangle^3 f(a) + \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24} \triangle^4 f(a) + \ldots\ldots$$

இச் சமன்பாட்டில், x க்கும், வேறுபாட்டட்டவணையி லிருந்து வேறுபாடுகளுக்கும் மதிப்புகளைப் பிரதியிட முதலாவது வகையீட்டுக் குணகத்தையடையலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் மாறியின் முதல் நிலையில், அதாவது a என்னுமிடத்தில் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண, (9·2) ஆவது சமன்பாட்டில் x க்கு 0 மதிப்பு கொடுத்து சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}3) \quad h \,.\, f'(a) = \triangle f(a) - \tfrac{1}{2}\triangle^2 f(a) + \tfrac{1}{3}\triangle^3 f(a) - \tfrac{1}{4}\triangle^4 f(a) + \tfrac{1}{5}\triangle^5 f(a) \ldots\ldots$$

$(a + xh)$ என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டைக் காணும் சூத்திரத்தைப் பெற (9·2) வது சமன்பாட்டை, x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்துதல் வேண்டும்.

$$(9{\cdot}4) \quad h^2 f''(a+xh) = \triangle^2 f(a) + (x-1)\triangle^3 f(a) + \frac{6x^2 - 18x + 11}{12}\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots$$

இதில் xக்கு 0 மதிப்பு கொடுத்தால், அட்டவணையில் மாறியின் முதல் நிலை மதிப்பான a என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாடுகாண சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}5) \quad h^2 \,.\, f''(a) = \triangle^2 f(a) - \triangle^3 f(a) + \frac{11}{12}\triangle^4 f(a) \ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு : 1 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் முதலிரு வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களை $x = 1$, $x = 1{\cdot}5$ என்ற இடங்களில் கண்டுபிடி.

x	$f(x)$
1	0·198669
2	0·295520
3	0·389418
4	0·479425
5	0·564642
6	0·644217

(செப்டம்பர் 1960)

வகை வேறுபாட்டு குணகங்கள் காண வேண்டிய இடங்கள் அட்டவணையின் முதலில் இருப்பதால், நியூட்டனின் (முன்னணி வேறுபாட்டு) வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்தல் வேண்டும்.

இங்கு $a = 1$, $h = 1$. $\therefore a + xh = 1$ ஆக இருக்கும் பொழுது $x = 0$ ஆகும். $a + xh = 1{\cdot}5$ ஆக இருக்கும் பொழுது $x = \frac{1{\cdot}5 - 1}{1} = 0{\cdot}5$ ஆகும்.

வேறுபாடுகளின் மதிப்பினைப் பெற சார்பின் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்தல் வேண்டும்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
1	0·198669				
		0·096951			
2	0·295520		– 0·002953		
		0·093898		– 0·000938	
3	0·389418		– 0·003891		0·0439
		0·090007		– 0·000899	
4	0·479429		– 0·004790		0·0447
		0·085217		– 0·000852	
5	0·564642		– 0·005642		
		0·079575			
6	0·644217				

a என்னுமிடத்தில் வகை வேறுபாட்டினைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரமாவது

$$h \,.\, f^1(a) = \triangle f(a) - \tfrac{1}{2}\triangle^2 f(a) + \tfrac{1}{3}\triangle^3 f(a) - \tfrac{1}{4}\triangle^4 f(a) + \tfrac{1}{5}\triangle^5 f(a) - \tfrac{1}{6}\triangle^6 f(a) + \ldots\ldots$$

இதில் $a = 1$ எனவும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் மதிப்பிட $f^1(1)$ இன் மதிப்பைப் பெறலாம். $(h = 1)$.

$$f^1(1) = 0{\cdot}096951 - \tfrac{1}{2}[-0{\cdot}002953] + \tfrac{1}{3}[-0{\cdot}000938) - \tfrac{1}{4}[0{\cdot}000039] + \ldots\ldots$$

$$= \underline{0{\cdot}0981052}$$

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$h^2 f''(a) = [\Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a) \ldots\ldots]$$

இதில் $h = 1$, $a = 1$ என மதிப்பிடு. வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்து மதிப்பிடு.

$$\therefore \quad f''(1) = -0{\cdot}002953 + 0{\cdot}000938 + \frac{11}{12} \times 0\ 000039$$

$$= \underline{-0{\cdot}001986}$$

$f'(1{\cdot}5)$ இன் மதிப்பினைக்காண எண்சார் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் (9·2) $a=1$, $h=1$, $x=0{\cdot}5$ என்ற மதிப்புகளையும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் பிரதியிடவும்.

$$f'(a+xh) = \frac{1}{h}[\Delta f(a) + \frac{2x-1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{3x^2-6x+2}{6}\Delta^3 f(a)$$

$$+ \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24}\Delta^4 f(a) + \ldots\ldots]$$

$$f'(1{\cdot}5) = 0{\cdot}096951 + 0{\cdot}000039375 + 0{\cdot}00001067$$

$$= \underline{0{\cdot}09700104.}$$

இரண்டாவது வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் (9·4) $a=1$, $h=1$, $x=0{\cdot}5$ என்ற மதிப்புகளையும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் பிரதியிடவும் :

$$h^2 f''(a+xh) = \Delta^2 f(a) + (x-1)\Delta^3 f(a)$$

$$+ \frac{6x^2-18x+11}{12}\Delta^4 f(a) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad f''(1{\cdot}5) = -0{\cdot}002953 + (0{\cdot}5 - 1)(-0{\cdot}000938)$$

$$+ \frac{6\times 0{\cdot}5^2 = 18\times 0{\cdot}5+11}{12} \times 0{\cdot}000039$$

$$= \underline{-0{\cdot}002577.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $f'(500)$, $f''(500)$, $f'(503)$, $f''(503)$, $f'(509)$, $f''(509)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக்காண்க.

x	$f(x)$
500	6·214608
510	6·234411
520	6·253829
530	6·272877
540	6·291569
550	6·309918

நியூட்டனின் வகைவேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்துக்கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக்கணக்கிடலாம். முதலில் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்தல் வேண்டும்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
500	6·214608				
		0·019803			
510	6·234411		– 0·000385		
		0·019418		0·000015	
520	6·253829		– 0·000370		– 0·000001
		0·019048		0·000014	
530	6·272877		– 0·000356		– 0·000001
		0·018692		0·000013	
540	6·291569		– 0·000343		
		0·018349			
550	6·309918				

$f'(500)$-ன் மதிப்பினைக் காண எண்ணியல் வகை வேறு பாட்டுச் சூத்திரத்தில் (9·3) $a = 500$, $h = 10$, $x = 0$ எனவும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் பிரதியிடு.

$$f'(a) = \frac{1}{h}[\Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(a) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(a) - \frac{1}{6}\Delta^6 f(a) + \ldots\ldots]$$

$$f'(500) = \frac{1}{10}[0{\cdot}019803 - \frac{1}{2}(-0{\cdot}000385) + \frac{1}{3}(0{\cdot}000015) - \frac{1}{4}(-0{\cdot}000001)]$$

$$= \underline{0{\cdot}002000075}$$

இதுபோலவே (9·5) வது வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f''(500)$-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$f''(a) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ f''(500) = \frac{1}{100}[\Delta^2 f(500) - \Delta^3 f(500) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(500)]$$

$$= \frac{1}{100}[-0{\cdot}000385 - 0{\cdot}000015 + \frac{11}{12}(-0{\cdot}000001)]$$

$$= \underline{-0{\cdot}000004}$$

$f'(503)$ இன் மதிப்பைப் பெற (9·2)-வது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும்.

$$a + xh = 503,\ a = 500,\ h = 10\ \therefore\ x = 0{\cdot}3.$$

$$h\,.\,f'(a+xh) = \Delta f(a) + \frac{2x-1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{3x^2 - 6x + 2}{6}\Delta^3 f(a) + \frac{4x^3 - 18x^2 + 22x - 6}{24}\Delta^4 f(a)\ldots\ldots$$

$x = 0{\cdot}3$ எனவும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad f'(503) = \frac{1}{10}\Big[0{\cdot}019803 + \frac{0{\cdot}6-1}{2}(-0{\cdot}000385) + \frac{0{\cdot}27-1{\cdot}8+2}{6}(0{\cdot}000015) + \frac{0{\cdot}108-1{\cdot}62+6{\cdot}6-6}{24}(-0{\cdot}000001)\ \ldots\ldots\Big]$$

$$= \underline{0{\cdot}001988}$$

$f''(503)$-ன் மதிப்பினைப் பெற $x = 0{\cdot}3$ எனவும் வேறுபாடு களுக்கு அட்டவணையிலிருந்து (9·4)-வது எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$f''(a+xh) = \frac{1}{h^2}\Big[\triangle^2 f(a)+(x-1)\ \triangle^3 f(a) + \frac{6x^2-18x+11}{12}\triangle^4 f(a)+\ldots\ldots\Big]$$

$$\therefore \quad f''(503) = \frac{1}{100}\Big[-0{\cdot}000385+(0{\cdot}3-1)(0{\cdot}000015) + \frac{1}{12}(0{\cdot}54-5{\cdot}4+3{\cdot}3)(-0{\cdot}000001)\Big]$$

$$= \underline{0{\cdot}0000038}$$

$f'(509)$ இன் மதிப்பினைக்காண (9·2)-வது சமன்பாட்டில் $x = 0{\cdot}9$ எனவும், வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்தும் பிரதியிடல் வேண்டும். [$\because\ a + xh = 509,\ a = 500,\ h = 10,$

$$\therefore \quad x = \frac{509-500}{10} = 0{\cdot}9]$$

$$hf'(a+xh) = \triangle f(a) + \frac{2x-1}{2}\triangle^2 f(a) + \frac{3x^2-6x+2}{6}\triangle^3 f(a) + \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24}\triangle^4 f(a)\ \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad f'(509) = \frac{1}{10}\Big[0{\cdot}019803 + \frac{1{\cdot}8-1}{2}(-0{\cdot}000385) + \frac{2{\cdot}43-5{\cdot}4+2}{6}(0{\cdot}000015) + \frac{2{\cdot}916-14{\cdot}58+19{\cdot}8-6}{24}(-0{\cdot}0000001)\ \ldots\ldots\Big]$$

$$= \underline{0{\cdot}0019647}$$

f'' (509) இன் மதிப்பினைக் காண (9·4) வது சமன்பாட்டில் $x=0{\cdot}9$ எனப் பிரதியிடுகின்றோம்.

$$h^2 f''(a+xh) = \triangle^2 f(a) + (x-1)\triangle^3 f(a) + \frac{6x^2-18x+11}{12}\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots$$

$$\therefore\quad f''(509) = \frac{1}{100}\left[-0{\cdot}000385 + (0{\cdot}9-1)(0{\cdot}000015) + \frac{4{\cdot}86-16{\cdot}2+11}{12}(0{\cdot}000001)\ldots\ldots\right]$$

$$= -\underline{0{\cdot}00000387}$$

இன்னணம் எந்த இடத்திலும் (அட்டவணையில் முன்னணியில்) வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்க்கண்ட சார்பிலிருந்து, f' (300), f' (302) f' (300·75) ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

x	$f(x)$
300	5·703782474656
301	5·707110264749
302	5·710427017375
303	5·713732805509
304	5·717027701406
305	5·720311776607
306	5·723585101952
307	5·726847747587

வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்கள் காண வேண்டிய இடங்கள், அட்டவணையின் முன்னணியில் இருப்பதால் நியூட்டனின் (முன்னணி வேறுபாட்டு) வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தவும். f' (300) இன் மதிப்பினைக் காண $a=300$, $h=1$, $x=0$ என (9·3) வது சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்துகின்றோம். வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண வேறுபாட்டட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
300	5·703782474656				
		3327790093			
301	5·707110264749		−11037467		
		3316752626		72975	
302	5·710427017375		−10964492		−720
		3305788134		72255	
303	5·713732805509		−10892237		−714
		3294895897		71541	
304	5·717027701406		−10820696		−701
		3284075201		70840	
305	5·720311776607		−10749856		−694
		3273325345		70146	
306	5·723585101952		−10678710		
		3262646635			
307	5·726847747587				

[தசம புள்ளி நீங்கலாக]

$$f'(a) = \frac{1}{h}[\triangle f(a) - \frac{1}{2}\triangle^2 f(a) + \frac{1}{3}\triangle^3 f(a) - \frac{1}{4}\triangle^4 f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore \quad f'(300) = \frac{1}{1}[0{\cdot}003327790093 - \frac{1}{2}(-0{\cdot}000011037467) + \frac{1}{3}(0{\cdot}000000072975) - \frac{1}{4}(-0{\cdot}000000000720)]$$

$$= \underline{0{\cdot}003333333331}$$

$f'(302)$ ஐக் காண $(9{\cdot}2)$ வது சமன்பாட்டில் $a = 302$, $h = 1$, $x = 0$ எனப் பிரதியிடுகின்றோம்.

$$f'(a) = \frac{1}{h}[\triangle f(a) - \frac{1}{2}\triangle^2 f(a) + \frac{1}{3}\triangle^3 f(a) - \frac{1}{4}\triangle^4 f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore \quad f'(302) = [\triangle f(302) - \frac{1}{2}\triangle^2 f(302) + \frac{1}{3}\triangle^3 f(302) - \frac{1}{4}\triangle^4 f(302) \ldots\ldots]$$

$$= [0{\cdot}003305788134 - \frac{1}{2}(-0{\cdot}000010892237) + \frac{1}{3}(0{\cdot}000000071541) - \frac{1}{4}(-0{\cdot}000000000701)]$$

$$= \underline{0{\cdot}003311258275}$$

$f'(300{\cdot}75)$ ன் மதிப்பைக் காண, $(9{\cdot}2)$ வது சமன்பாட்டில் $a = 300$, $h = 1$, $x = \frac{300{\cdot}75 - 300}{1} = 0{\cdot}75$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$f'(a+xh) = \frac{1}{h}[\triangle f(a) + \frac{2x-1}{2}\triangle^2 f(a) + \frac{3x^2-6x+2}{6}\triangle^3 f(a) + \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24}\triangle^4 f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore \quad f'(300{\cdot}75) = [0{\cdot}003327790093 + \frac{1}{4}(0{\cdot}000011037467)$$

$$+ \frac{3(0{\cdot}75)^2 - 6(0{\cdot}75) + 2}{6}(0{\cdot}000000072975)$$

$$(-0{\cdot}000000000720)\left(\frac{4(0{\cdot}75)^3 - 18(0{\cdot}75)^2 + 22(0{\cdot}75) - 6}{24}\right)$$

$$= \underline{0{\cdot}003330558139}$$

வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டிய இடம், அதாவது x ன் மதிப்பு, அட்டவணையின் இறுதியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது நியூட்டனின் பின்னணி வேறுபாட்டு (இடைச் செருகல்) சூத்திரத்தை வகைப்படுத்திப் பெற்ற, வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். இப்பொழுது அந்த எண்ணியல் வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை நிறுவுவோமாக.

சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது

x	$f(x)$
$a-5h$	$f(a-5h)$
$a-4h$	$f(a-4h)$
$a-3h$	$f(a-3h)$
$a-2h$	$f(a-2h)$
$a-h$	$f(a-h)$
a	$f(a)$

நியூட்டனின் பின்னணி வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$(9{\cdot}6) \quad f(a+xh) = f(a) + x\,\Delta f(a-h)$$

$$+ \frac{(x+1)(x)}{2!}\Delta^2 f(a-2h) + \frac{(x+2)(x+1)x}{6}\Delta^3 f(a-3h)$$

$$+ \frac{(x+3)(x+2)(x+1)\,.\,x}{24}\Delta^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

இச்சமன்பாட்டை ஒருமுறை x ஐப் பொறுத்து வகைப் படுத்தும் பொழுது $(a+xh)$ என்னுமிடத்தில் முதற்படி வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண உதவும் சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}7)\quad h\,.\,f'(a+xh) = \triangle f(a-h) + \frac{2x+1}{2}\triangle^2 f(a-2h) + \frac{3x^2+6x+2}{6}\triangle^3 f(a-3h) + \frac{4x^3+18x^2+22x+6}{24}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

இதில் x க்கு 0 மதிப்பிட்டால், $x=a$ என்னுமிடத்தில் முதல் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}8)\quad h\,.\,f'(a) = \triangle f(a-h) + \frac{1}{2}\triangle^2 f(a-2h) + \frac{1}{3}\triangle^3 f(a-3h) + \frac{1}{4}\triangle^4 f(a-4h) + \frac{1}{5}\triangle^5 f(a-5h) + \ldots\ldots$$

$(a+xh)$ என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டைக் காண உதவும் சூத்திரத்தைப் பெற, (9·7) வது சமன்பாட்டை x ஐப் பொறுத்து வகைப் படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}9)\quad h^2 f''(a+xh) = \triangle^2 f(a-2h) + (x+1)\triangle^3 f(a-3h) + \frac{6x^2+18x+11}{27}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

இதில் x க்கு 0 மதிப்பிட, a யில் இரண்டாமாவது வகை வேறுபாட்டைக் காண, சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}10)\quad h^2 f''(a) = \triangle^2 f(a-2h) + \triangle^3 f(a-3h) + \frac{11}{12}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

இதுபோல மற்ற உயர் வகையீட்டுக் குணகங்களை அடைய, இச்சூத்திரத்தை மேலும் மேலும் வகைப்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண, ஒரு சூத்திரத்தை நிறுவுக. அதனை உபயோகித்து

$$f'(1{\cdot}10),\quad f''(1{\cdot}10),\quad f'(1{\cdot}095),\quad f''(1{\cdot}093)$$

ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து காண்க.

x	$f(x)$
1·05	1·25386
1·06	1·26996
1·07	1·28619
1·08	1·30254
1·09	1·31903
1·10	1·33565

(ஏப்ரல் 1961)

வகையீட்டுக் குணகங்களைக் காணவேண்டிய புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையின் இறுதியில் இருப்பதால் நியூட்டனின் பின்னணி வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து, வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை நிறுவுதல் வேண்டும். இதனை நிறுவும் முறையினை முன்னரே அறிந்துள்ளோம். இங்கு

$$a = 1{\cdot}10,\ h = 0{\cdot}01, \qquad \therefore\quad a + xh = 1{\cdot}10$$

ஆக இருக்கும் பொழுது $x = 0$ ஆகும். மேலும்

$a + xh = 1{\cdot}095$ ஆக இருக்கும் பொழுது

$$x = \frac{1{\cdot}095 - 1{\cdot}10}{0{\cdot}01} = -0{\cdot}5 \quad \text{ஆகும்.}$$

$a + xh = 1{\cdot}093$ ஆக இருக்கும் பொழுது

$$x = \frac{1{\cdot}093 - 1{\cdot}10}{0{\cdot}01} = -0{\cdot}7 \text{ ஆகும்.}$$

முதலில் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைப்போம்.

x	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
$a-5h$	1·05	1·25386			
			0·01610		
$a-4h$	1·06	1·26996		0·00013	
			0·01623		−0·00001
$a-3h$	1·07	1·28619		0·00012	
			0·01635		+0·00002
$a-2h$	1·08	1·30254		0·00014	
			0·01649		−0·00001
$a-h$	1·09	1·31903		0·00013	
			0·01662		
a	1·10	1·33565			

$x = a$ என்னுமிடத்தில், வகை வேறுபாட்டினைக் காண உதவும் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது (9·8)

$$h f'(a) = \triangle f(a-h) + \frac{1}{2} \triangle^2 f(a-2h) + \frac{1}{3} \triangle^3 f(a-3h) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad f'(1{\cdot}10 = \frac{1}{0{\cdot}01} \left[0{\cdot}01662 + \frac{1}{2}(0{\cdot}00013) + \frac{1}{3}(-0{\cdot}00001) \ldots\ldots\right]$$

$$= \underline{1{\cdot}66817}$$

(9·10) வது சமன்பாட்டில் x க்கு 0 மதிப்புக் கொடுக்க $f''(1{\cdot}10)$ ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$h^2 f''(a) = \triangle^2 f(a-2h) + \triangle^3 f(a-3h) + \frac{11}{12} \triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad f''(1{\cdot}10) = \frac{1}{0{\cdot}01^2} [(0{\cdot}00013 + (-0{\cdot}00001) \ldots\ldots]$$

$$= \underline{1{\cdot}21}$$

(9·7) வது சமன்பாட்டில் x க்கு $-0{\cdot}5$ ஐப் பிரதியிட $f'(1{\cdot}095)$ ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$h\,f'(a+xh) = \triangle f(a-h) + \frac{2x+1}{2}\triangle^2 f(a-2h) + \frac{3x^2+6x+2}{6}\triangle^3 f(a-3h) + \frac{4x^3+18x^2+22x+6}{24}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

$$\therefore\quad f'(1{\cdot}095) = \frac{1}{0{\cdot}01}\,[\,0{\cdot}01662 + 0 + 0{\cdot}0000028\,]$$

$$= \underline{1{\cdot}66228}$$

$(a+xh)$ என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண உதவும் சூத்திரமாவது:

$$h^2 f''(a+xh) = \triangle^2 f(a-2h) + (x+1)\,(\triangle^3 f(a-3h) + \frac{6x^2+18x+11}{12}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots$$

$$\therefore\quad f''(1{\cdot}093) = \frac{1}{0{\cdot}01^2}\,[\,0{\cdot}00013 - 0{\cdot}000003\,]$$

$$= \underline{1{\cdot}27}$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $f'(440)$, $f''(440)$, $f'(438)$, $f''(438)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
400	2·6020600
410	2·6127839
420	2·6232493
430	2·6334685
440	2·6434527

வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டிய இடங்கள், அட்டவணையின் இறுதியில் இருப்பதால் நியூட்டனின் (பின்னணி வேறுபாட்டு) வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம். முதலில் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைப்போம். (தசம புள்ளிகள் நீங்கலாக)

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
400	2·6020600				
		107239			
410	2·6127839		– 2585		
		104654		123	
420	2·6232493		– 2462		– 11
		102192		112	
430	2·6334685		– 2350		
		99842			
440	2·6434527				

(1) $f'(440)$ ன் மதிப்பைக் காண, (9·8) வது சமன்பாட்டில் $a = 440$, $h = 10$, $x = 0$ என மதிப்பிடவும்.

$$f'(a) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(a-h) + \tfrac{1}{2}\Delta^2 f(a-2h) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(a-3h) + \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(a-4h) + \tfrac{1}{5}\Delta^5 f(a-5h) + \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore f'(440) = \frac{1}{10}\left[0·0099842 + \tfrac{1}{2}(-0·0002350) + \tfrac{1}{3}(0·0000112) + \tfrac{1}{4}(-0·0000011)\right]$$

$$= \underline{0·0009870}$$

(2) $f''(440)$ன் மதிப்பினைக் காண (9·10) வது சமன்பாட்டில் $a=440$, $h=10$, $x=0$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$f''(a) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-3h) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a-4h) \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ f''(440) = \frac{1}{10^2}\left[-0{\cdot}0002350 + 0{\cdot}0000112 + \frac{11}{12}(-0{\cdot}0000011)\right]$$

$$= \underline{-0{\cdot}0000022}$$

(3) $f'(438)$ ன் மதிப்பினைப் பெற (9·7) வது சமன்பாட்டில் $a = 440,\ h = 10 \quad \therefore\ x = \frac{438-440}{10} = -0{\cdot}2$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$f'(a+xh) = \frac{1}{h}\left[\triangle f(a-h) + \frac{2x+1}{2}\triangle^2 f(a-2h) + \frac{3x^2+6x+2}{6}\triangle^3 f(a-3h) + \frac{4x^3+18x^2+22x+6}{24}\triangle^4 f(a-4h) \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ f'(438) = \frac{1}{10}\left[0{\cdot}0099842 + 0{\cdot}3(-0{\cdot}0002350) + \tfrac{1}{3}(0{\cdot}0000112) - 0{\cdot}000000121\right.$$

$$= \underline{0{\cdot}000997312}$$

(4) $$f''(a+xh) = \frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 f(a-2h) + (x+1)\triangle^3 f(a-3h) + \frac{6x^2+18x+11}{12}\triangle^4 f(a-4h) + \ldots\ldots\right]$$

$a = 440,\quad h = 10,\quad x = -0{\cdot}2$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ f''(438) = \frac{1}{10^2}\left[-0{\cdot}0002350 + (0{\cdot}8)(0{\cdot}0000112) + \frac{0{\cdot}24 - 3{\cdot}6 + 11}{12}(-0{\cdot}0000011)\right]$$

$$= \underline{-0{\cdot}0000023}$$

வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் கணக்கிடப்பட வேண்டிய இடம், அதாவது மாறியின் மதிப்பு அட்டவணை யின் நடுவிலிருந்தால், மைய வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை வகைப்படுத்தி எண்ணியல் வகை வேறுபாட் டுச் சூத்திரங்களை நிறுவி, பின் அவைகளை உபயோகித்து, வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும். மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களில் ஸ்டெர்லிங், பெஸ்ஸல் ஆகிய வர்களின் சூத்திரங்களை மிகுதியாகப் பயன்படுத்துகின்றோம். முதலில் ஸ்டெர்லிங்கின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை நிறுவுவோ மாக.

$f(x)$, கீழ்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப் பட்டிருக்கும் பொழுது

x	$f(x)$
$a-3h$	$f(a-3h)$
$a-2h$	$f(a-2h)$
$a-h$	$f(a-h)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$

மைய வேறுபாட்டுக் குறியில் ஸ்டெர்லிங்கின் சூத்திரமாவது,

$$(9{\cdot}11).\quad f(a+xh) = f(a) + x\,\mu\,\delta f(a) + \frac{x^2}{2!}\,\delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)}{3!}\,\mu\,\delta^3 f(a) + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\,\delta^4 f(a)$$

$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)}{5!}\,\mu\,\delta^5 f(a) + \ldots\ldots$$

இதில் $(a + xh)$ ன் மதிப்பு aக்கு மிக அருகில் இருக்கும். இச்சூத்திரத்தை ஒரு முறை x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தினல் $(a + xh)$ என்னுமிடத்தில் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காணச் சூத்திரம் கிடைக்கின்றது.

$$(9{\cdot}12) \quad h \,.\, f'(a + xh) = \mu\, \delta f(a) + x\, \delta^2 f(a) + \tfrac{1}{6}(3x^2 - 1)\, \mu\, \delta^3 f(a) + \frac{1}{24}(4x^3 - 2x)\, \delta^4 f(a) + \frac{5x^4 - 15x^2 + 4}{120}\, \mu\, \delta^5 f(a) + \ldots\ldots$$

xக்கு 0 மதிப்பு கொடுத்தால் a என்னுமிடத்தில் முதல் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காணலாம்.

$$(9{\cdot}13) \quad h \,.\, f'(a) = \mu\, \delta f(a) - \tfrac{1}{6}\, \mu\, \delta^3 f(a) + \frac{1}{30}\, \mu\, \delta^5 f(a) - \ldots\ldots$$

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண மீண்டுமொரு முறை (9·12) வது சமன்பாட்டை வகைப் படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}14) \quad h^2 f''(a + xh) = \delta^2 f(a) + x\, \mu\, \delta^3 f(a) + \frac{6x^2 - 1}{12}\, \delta^4 f(a) + \frac{2x^3 - 3x}{12}\, \mu\, \delta^5 f(a) + \ldots\ldots$$

$x = 0$ என வைக்கவும். a என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தையடையலாம்.

$$(9{\cdot}15) \quad h^2 f''(a) = \delta^2 f(a) - \frac{1}{12}\, \delta^4 f(a) + \frac{1}{90}\, \delta^6 f(a) + \ldots\ldots$$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளை உபயோகித்து முதலிரு வகையீட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 6:

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f'(3\cdot0)$, $f'(3\cdot2)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	x	$f(x)$
$a-3h$	0	1·000
$a-2h$	0·1	1·101
$a-h$	0·2	1·220
a	0·3	1·362
$a+h$	0·4	1·528
$a+2h$	0·5	1·721
$a+3h$	0·6	1·943

இங்கு $a = 3\cdot0$, $a + xh = 0\cdot32$. அட்டவணையின் நடுவில் அமைந்திருக்கின்றன. எனவே மையவேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரங்களிலிருந்து நிறுவப்பட்ட எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களை உபயோகிக்க வேண்டும். $a+xh=0\cdot32$ $\therefore$ $x=0\cdot2$. முதலில் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைப்போம்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1·000				
		0·101			
0·1	1·101		0·018		
		0·119		0·005	
0·2	1·220		0·023		$-0\cdot004$
		0·142		0·001	
0·3	1·362		0·024		0·002
		0·166		0·003	
0.4	1·528		0·027		$-0\cdot001$
		0·193		0·002	
0·5	1·721		0·029		
		0·222			
0·6	1·943				

$f'(3\cdot2)$-ன் மதிப்பைக் காண, (9·12)-வது சமன்பாட்டில் $x = 0\cdot2$ எனப் பிரதியிடவும். ($a = 0\cdot3$, $h = 0\cdot1$)

$$f'(a+xh) = \frac{1}{h}[\mu\delta f(a) + x\,\delta^2 f(a) + \frac{1}{6}(3x^2-1)\,\mu\delta^3 f(a) + \frac{1}{24}(4x^3-2x)\,\delta^4 f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ f'(3\cdot2) = \frac{1}{0\cdot1}[(0\cdot142+0\cdot166)\frac{1}{2} + 0\cdot2\ (0\cdot024) + \frac{1}{6}\{3(0\cdot04-1)\}\{0\cdot001+0\cdot003\}\frac{1}{2} \ldots\ldots]$$

$$= \underline{1\cdot58963}$$

$x = 0$ என (9·13)–வது சமன்பாட்டில் பிரதியிட $f'(3\cdot0)$-ன் மதிப்பை அடையலாம்.

$$h\,.\,f'(a) = \mu\delta f(a) - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f(a) + \frac{1}{30}\mu\delta^5 f(a) + \ldots\ldots$$

$$\therefore\ f'(3\cdot0) = \frac{1}{0\cdot1}[\frac{0\cdot142+0\cdot166}{2} - \frac{1}{6}\{0\cdot001+0\cdot003\}\frac{1}{2}]$$

$$= \underline{1\cdot5367}$$

இவ் வட்டவணையிலிருந்து $f'(0\cdot4)$, $f''(0\cdot25)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 7:

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx}\right]_{x=0\cdot6},\quad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx}\right]_{x=0\cdot63}$$ ஆகிய

மதிப்புகளைக் காண்க.

x.	f(x)
0·4	1·5836494
0·5	1·7974426
0·6	2·0442376
0·7	2·3275054
0·8	2·6510818

ஸ்டெர்லிங்கின் வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களை உபயோகித்து இம் மதிப்புகளைப் பெறலாம். முதலில் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைப்போம்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
0·4	1·5836494				
		2137932			
0·5	1·7974426		330018		
		2467950		34710	
0·6	2·0442376		364728		3648
		2832678		38358	
0·7	2·3275054		403086		
		3235764			
0·8	2·6510818				

இங்கு $a = 0·6$, $h = 0·1$ என எடுத்துக்கொண்டால், $x = 0$ ஆகும். $f''(0·6)$-ன் மதிப்பைக்காண (9·15)-வது சமன்பாட்டை உபயோகப் படுத்துகின்றோம்.

$$f''(a) = \frac{1}{h^2}\left[\delta^2 f(a) - \frac{1}{12}\delta^4 f(a) + \frac{1}{90}\delta^6 f(a) \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \quad f''(0·6) = \frac{2}{0·1^2}\left[0·0364728 - \frac{1}{12}(0·0003648)\right]$$

$$= \underline{3·64424}$$

$f''(0{\cdot}63)$-ன் மதிப்பைக் காண, (9·14)-வது சமன்பாட்டில் $a = 0{\cdot}6,\ h = 0{\cdot}1 \quad \therefore\ x = \dfrac{0{\cdot}63 - 0{\cdot}6}{0{\cdot}1} = 0{\cdot}3$ எனப்பிரதியிடவும்.

$$f''(a + xh) = \frac{1}{h^2}\left[\delta^2 f(a) + x\mu\delta^3 f(a) + \frac{6x^2 - 1}{12}\delta^4 f(a) + \frac{2x^3 - 3x}{12}\mu\delta^5 f(a) \ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\ f''(0{\cdot}63) = \frac{1}{0{\cdot}1^2}\left[0{\cdot}0364728 + 0{\cdot}3\,(0{\cdot}0036534) - \frac{1}{12}(0{\cdot}46)\,(0{\cdot}0003648) \ldots\ldots\right]$$

$$= \underline{3{\cdot}7554836}$$

பெஸ்ஸலின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை நிறுவுவதை இனிக் கவனிப்போம். வகை வேறுபாடு காணவேண்டிய இடம், அதாவது மாறியின் மதிப்பு அட்டவணையின் மையத்திலிருந்து, அதனோடு மாறியின் இரு மதிப்புக்களுக்கு இடையில் சம தூரத்திலிருக்கும் பொழுது இந்தச் சூத்திரத்தை உபயோகித்தால், வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தின் சரியான மதிப்பினைப் பெறலாம்.

பெஸ்ஸலின் மைய வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது.

$$(9{\cdot}16)\quad f\left(a + xh + \frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right] + x\,\Delta f(a) + \frac{(x^2 - \frac{1}{4})}{2!}\,\frac{1}{2}\left[\Delta^2 f(a-h) + \Delta^2 f(a)\right] + \frac{x\,(x^2 - \frac{1}{4})}{3!}\,\Delta^3 f(a-h) + \frac{(x^2 - \frac{1}{4})\,(x^2 - \frac{9}{4})}{4!}\,\frac{1}{2}\left[\Delta^4 f(a-2h) + \Delta^4 f(a-h)\right] + \ldots\ldots$$

இதில் a ன் மதிப்பு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை யில் கீழ்க்கண்டவாறு அமைந்திருக்கும்.

x	$f(x)$
$a-3h$	$f(a-3h)$
$a-2h$	$f(a-2h)$
$a-h$	$f(a-h)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$

பெஸ்ஸலின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை, x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}17) \quad h\,.\,f'\left(a+xh+\frac{1}{2}h\right)=\triangle f(a)+\frac{x}{2}[\triangle^2 f(a-h)+\triangle^2 f(a)]$$
$$+\frac{12x^2-1}{24}\triangle^3 f(a-h)$$
$$+\frac{4x^3-5x}{24}\,\frac{1}{2}\,[\triangle^4 f(a-2h)+\triangle^4 f(a-h)]+\ldots\ldots$$

x க்கு 0 மதிப்பிட, $(a+\frac{1}{2}h)$ என்னுமிடத்தில் முதல் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காணச் சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}18) \quad h\,.\,f'\left(a+\frac{1}{2}h\right)=\triangle f(a)-\frac{1}{24}\triangle^3 f(a-h)$$
$$+\frac{3}{640}\triangle^5 f(a-2h)-\ldots\ldots$$

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண, (9·17) ஆவது சமன்பாட்டை x ஐப் பொறுத்து வகைப் படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}19)\quad h^2 f''\left(a+xh+\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{2}\left[\Delta^2 f(a-h)+\Delta^2 f(a)\right]$$
$$+\,x\,\Delta^3 f(a-h)$$
$$+\,\frac{12x^2-5}{24}\cdot\frac{1}{2}\left[\Delta^4 f(a-2h)+\Delta^4 f(a-h)\right]\ldots\ldots$$

இதில் x க்கு 0 மதிப்பிட, $(a+\frac{1}{2}h)$ என்னுமிடத்தில் இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காணச் சூத்திரம் அமைகின்றது.

$$(9{\cdot}20)\quad h^2 f''\left(a+\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{2}\left[\Delta^2 f(a-h)+\Delta^2 f(a)\right]$$
$$-\,\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{2}\left[\Delta^4 f(a-2h)+\Delta^4 f(a-h)\right]\ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 8:

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $x=1{\cdot}35$ என்னுமிடத்தில் முதலிருவகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் காண்க.

x	$f(x)$
1·1	−1·62628
1·2	0·15584
1·3	2·45258
1·4	5·39168
1·5	9·12500
1·6	13·83072

வகை வேறுபாட்டினைக் காண வேண்டிய இடம் அட்டவணையின் நடுவில், மாறியின் இரு மதிப்புகளுக்குச் சம தூரத்தில் அமைந்திருப்பதால் பெஸ்ஸலின் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

சூத்திரத்திலுள்ள வேறுபாடுகளுக்கு மதிப்பிட, வேறுபாட்டட்டவணையை அமைக்கின்றோம்.

x	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
$a-2h$	1·1	−1·62628					
			1·78212				
$a-h$	1·2	0·15584		0·40840			
			2·29672		0·12780		
a	1·3	2·45256		0·51460		0·024	
			2·93912		0·15180		0·0024
$a+h$	1·4	5·39168		0·64240		0·0264	
			3·73332		0·17820		
$a+2h$	1·5	9·12500		0·79420			
			4·70572				
$a+3h$	1·6	13·83072					

இங்கு $a=1{\cdot}3$, $h=0{\cdot}1$, $a+xh+\frac{1}{2}h=1{\cdot}35$ என எடுத்துக் கொண்டால் $x=0$ ஆகும். $f'(1{\cdot}35)$ ன் மதிப்பைக் காண (9·18) ல் வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையிலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$f'\left(a+\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{h}\left[\triangle f(a)-\frac{1}{24}\triangle^3 f(a-h)+\frac{3}{640}\triangle^5 f(a-2h)\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore\quad f'(1{\cdot}35)=\frac{1}{0{\cdot}1}\left[2{\cdot}93912-\frac{1}{24}(0{\cdot}15180)+\frac{3}{640}(0{\cdot}0024)\right]$$

$$=\underline{29{\cdot}32806}$$

$f''(1{\cdot}35)$ ன் மதிப்பைக் காண (9·20) ஆவது சமன்பாட்டை உபயோகிக்கவும்.

$$f''\left(a+\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{h^2}\left\{\left[\triangle^2 f(a)+\triangle^2 f(a-h)\right]\frac{1}{2}-\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{2}\left[\triangle^4 f(a-h)+\triangle^4 f(a-2h)\right]\ldots\ldots\right\}$$

$$\therefore\quad f''(1{\cdot}35)=\frac{1}{0{\cdot}1^2}\left\{[0{\cdot}51460+0{\cdot}64240]\frac{1}{2}-\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{2}[0{\cdot}0240+0{\cdot}0264]\ldots\ldots\right\}$$

$$=\underline{71{\cdot}305}$$

இதே அட்டவணையிலிருந்து $f'(1{\cdot}45)$, $f''(1{\cdot}45)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

குறிப்பு : பெஸ்ஸலின் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை மையவேறுபாட்டுக் குறியிலும் நிறுவலாம். இங்கு $a=0$, $h=1$ என எடுத்துக்கொண்டால், பெஸ்ஸலின் இடைச்செருகல் சூத்திரமாவது:

$$(9{\cdot}21) \quad f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\mu f\left(\frac{1}{2}\right)+x\,\delta f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2!}\mu\,\delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{x\,(x^2-\frac{1}{4})}{3!}\delta^3 f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{(x^2-\frac{1}{4})\,(x^2-\frac{9}{4})}{4!}\mu\,\delta^4 f\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots\ldots$$
$$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$$

இச் சமன்பாட்டை x ஐப் பொறுத்து ஒரு தடவை வகைப்படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}22) \quad f'\left(x+\frac{1}{2}\right)=\delta f\left(\frac{1}{2}\right)+x\,\mu\,\delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3x^2-\frac{1}{4}}{3!}\delta^3 f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{4x^3-5y}{4}\mu\,\delta^4 f\left(\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots$$

இதில் x க்கு 0 மதிப்பிடு.

$$(9{\cdot}23) \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=\delta f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24}\delta^3 f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{640}\delta^5 f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{5}{7168}\delta^7 f\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots\ldots$$

இச்சமன்பாட்டை உபயோகித்து $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டைக் காண (9·22) ஆவது சமன்பாட்டை x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}24) \quad f''\left(x+\frac{1}{2}\right)=\mu\,\delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right)+x\,\delta^3 f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{12x^2-5}{24}\mu\,\delta^5 f\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots\ldots$$

இதில் x க்கு 0 என மதிப்பிட $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ ன் மதிப்பைப் பெற சூத்திரம் கிடைக்கின்றது.

$$(9{\cdot}25)\quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = \mu\,\delta^2 f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{24}\,\mu\,\delta^4 f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{259}{5760}\,\mu\,\delta^6 f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3229}{322560}\,\mu\,\delta^8 f\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots$$

மைய வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்து, இச்சூத்திரங்களை உபயோகித்து வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிடலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் இடைவெளி தூரம் 'h' ஆக இருக்கும் பொழுது, இச்சூத்திரங்களின் அமைப்பு சிறிது மாறுகின்றது. அப்பொழுது (9·22), (9·23) ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளின் இடப்புறத்தையும் h ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

இதுபோலவே இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களின் (9·24), (9·25) இடப்பக்கங்களை h^2 ஆல் பெருக்க, தேவையான சூத்திரங்களை அடையலாம்.

சார்புகள் சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருந்தால், நியூட்டன், ஸ்டெர்லிங், பெஸ்ஸல் ஆகியவர்களின் சூத்திரங்களிலிருந்து, எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களை நிறுவி, வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைத் தேவைப்பட்ட இடங்களில் கணக்கிடும் முறையைப் பார்த்தோம். ஆனல் சார்புகள் அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது, நியூட்டனின் (வகுபட்ட வேறுபாடுகள்) இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை நிறுவி, வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிடுதல் வேண்டும். எனவே நியூட்டனின் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை அமைப்போம்.

சார்பு கீழ்க்காணும் விதம் அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது

x	$f(x)$
a	$f(a)$
b	$f(b)$
c	$f(c)$
d	$f(d)$
e	$f(e)$
h	$f(h)$

நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது,

$$(9{\cdot}26) \quad f(x) = f(a) + (x-a) \underset{b}{\Delta} f(a) + (x-a)(x-b) \underset{bc}{\Delta^2} f(a)$$

$$+ (x-a)(x-b)(x-c) \underset{bcd}{\Delta^3} f(a)$$

$$+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots$$

இச்சமன்பாட்டில் $x - a = A$

$x - b = B$

$x - c = C$

$x - d = D$

$\vdots$ எனப் பிரதியிடவும்.

அப்பொழுது நியூட்டனின் இடைச் செருகல் சூத்திர மாவது

$$(9{\cdot}26)' \quad f(x) = f(a) + A \underset{b}{\Delta} f(a) + AB \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + ABC \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) + ABCD \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots$$

இச்சமன்பாட்டை x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தினல் முதலாவது வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}27) \quad f'(x) = \underset{b}{\Delta} f(a) + (A+B) \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (AB+AC+BC) \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) + (ABC+ABD+ACD+BCD) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots$$

இச்சூத்திரத்தை மீண்டுமொருமுறை x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தினல், இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தினைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}28) \quad f''(x) = 2\ [\ \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (A+B+C) \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) + (AB+AC+AD+BC+BD+CD) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) \ldots\ldots$$

இதனை இன்னுமொருமுறை வகைப்படுத்தினல் மூன்றுவது வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$(9{\cdot}29) \quad f'''(x) = 3!\ [\ \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) + (A+B+C+D) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots]$$

நான்காம் வகை வேறுபாட்டினைக் காண இதனை x ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தவும்.

$$(9{\cdot}30) \quad f^{iv}(x) = 4!\ [\ \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + (A+B+C+D+E) \underset{bcdef}{\Delta^5} f(a) \ldots\ldots]$$

எடுத்துக்காட்டு 9:

வகுபட்ட வேறுபாடுகளை உபயோகித்து கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகளிலிருந்து $\left.\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=8}$ ன் மதிப் பினைக் காண்க.

$$f(6) = 1{\cdot}556$$
$$f(7) = 1{\cdot}690$$
$$f(9) = 1{\cdot}908$$
$$f(12) = 2{\cdot}158$$

(ஏப்ரல் 1965)

முதலில் வகுபட்ட வேறுபாட்டட்டவணையை அமைப் போம்.

x	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
a	6	1·556			
			0·134		
b	7	1·690		−0·0083	
			0·109		0·00051
c	9	1·908		−0·0052	
			0·083		
d	12	2·158			

xன் மதிப்பு 8 ஆக இருக்கும்பொழுது

$$x-a = A = 2$$
$$x-b = B = 1$$
$$x-c = C = -1$$
$$x-d = D = -4$$

ஆகும்.

இம்மதிப்புகளையும், வகுபட்ட வேறுபாடுகளுக்கு, வேறு பாட்டட்டவணையிலிருந்தும் (9·27) ஆவது சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$f'(x) = [\underset{b}{\triangle} f(a) + (A+B) \underset{bc}{\triangle^2} f(a) + (AB+AC+BC) \underset{bcd}{\triangle^3} f(a)$$
$$+ (ABC + ABD + ACD + BCD) \underset{bcde}{\triangle^4} f(a) + \ldots\ldots]$$

$$\therefore f'(8) = 0{\cdot}134 + (2+1)(-0{\cdot}0083)$$
$$+ [2 + (2 \times -1) + (1 \times -1)](0{\cdot}00051)$$
$$= \underline{0{\cdot}09859}$$

எடுத்துக்காட்டு 10:

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து முதல் நான்கு வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களை $x = 3$, $x = 11$ ஆகிய இரண்டு இடங்களில் கணக்கிடு.

x	$f(x)$
2	108243219
5	121550628
9	141158164
13	163047364
15	174900628
21	214358884

நியூட்டனின் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களை உபயோகித்து இக் குணகங்களைக் கணக்கிடலாம். முதலில் வகுபட்ட வேறுபாட்டட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
2	108243219				
		4455803			
5	121550628		66583		
		4901884		429	
9	141158164		71302		1
		5472300		442	
13	163047364		75922		1
		5926632		458	
15	174900628		81218		
		6576376			
21	214358884				

A, B, C, D, E ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

		$x=3$	$x=11$
$a=2$	$A=x-a$	$=1$	9
$b=5$	$B=x-b$	$=-2$	6
$c=9$	$C=x-c$	$=-6$	2
$d=13$	$D=x-d$	$=-10$	-2
$e=15$	$E=x-e$	$=-12$	-4

முதலில் $x=3$ என்னுமிடத்தில் முதல் நான்கு வகை வேறு பாட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிடலாம்.

முதலாவது வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண உதவும் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$f'(x) = \underset{b}{\Delta} f(a) + (A+B) \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (AB+AC+BC) \underset{bcd}{\Delta^3} f(a)$$
$$+ (ABC + ACD + BCD + ABD) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots$$

இதில் xக்கு 3 எனவும் வேறுபாடுகளுக்கு அட்டவணையி லிருந்தும் பிரதியிடவும்.

$$\therefore f'(3) = 4435803 + (1-2)\ 66583 + (-2-6+12)\ 429$$
$$+ (12+60-120+20)\ .\ 1$$
$$= \underline{4370908}$$

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண (9·28) ஆவது சமன்பாட்டை உபயோகிக்கின்றோம்.

$$f''(x) = 2\ [\ \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (A+B+C) \underset{bcd}{\Delta^3} f(a)$$
$$+ (AB+AC+AD+BC+BD) \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ f''(3) = 2[66583 + (1-2-6)\,429 + (-2-6-10+12+20+60)1]$$
$$= \underline{127308}$$

மூன்றாவது வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண (9·29) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

$$f'''(x) = 6\,[\ \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) + (A+B+C+D)\ \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ f'''(3) = 6\,[429 + (1-2-6-10) \times 1\,]$$
$$= \underline{2472}$$

நான்காவது சமன்பாட்டைக் காண (9·30) ஆவது சமன்பாட்டை உபயோகப்படுத்துகின்றோம்.

$$f^{iv}(x) = 24\,[\ \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + (A+B+C+D+E)\ \underset{bcdef}{\Delta^5} f(a) \ldots\ldots]$$

$$\therefore\ f^{iv}(3) = 24 \times 1$$
$$= 24$$

இதுபோலவே மேலே உபயோகப் படுத்தப்பட்ட நான்கு சூத்திரங்களையும் உபயோகித்து $x = 11$ என்னுமிடத்தில் வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிடலாம்.

$x = 11$ என்ற இடத்தில் முதல் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண (9·27) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

$$f'(x) = \underset{b}{\Delta} f(a) + (A+B)\ \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (AB+AC+BC)\ \underset{bcd}{\Delta^3} f(a)$$
$$+ (ABC+ABD+ACD+BCD)\ \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots$$

இதில் A, B, C ...... ஆகியவைகளுக்கு மேலே உள்ள அட்டவணையில் $x = 11$ என்ற வரிசையில் உள்ள மதிப்புகளைப் பிரதியிடுகின்றோம்.

$$\therefore\ f'(11) = 4435803 + (9+6)\,66583 + (54+12+18)\,429$$
$$+ (108-36-24-108)\,1.$$
$$= \underline{5470254}$$

இரண்டாம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் கணக்கிட (9·28) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

$$f''(x) = 2\,[\ \underset{bc}{\Delta^2} f(a) + (A+B+C)\ \underset{bcd}{\Delta^3} f(a) +$$
$$(AB+AC+AD+BC+BD+CD)\ \underset{bcde}{\Delta^4} f(a) + \ldots\ldots\ ]$$

$$\therefore \quad f''(11) = 2\,[66583 + 17\,(429) + 50\,]$$
$$= 2(73926) = \underline{147852}$$

மூன்ருவது வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண (9·29) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகின்ருேம்.

$$f'''(x) = 3!\,[\underset{bcd}{\triangle^3} f(a) + (A + B + C + D)\underset{bcde}{\triangle^4} f(a) + \ldots\ldots]$$

$$\therefore \quad f'''(11) = 6\,[\,429 + 15 \times 1\,]$$
$$= \underline{2664}$$

நான்காம் வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தைக் காண (9·30) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துகின்ருேம்.

$$f^{iv}(x) = 4!\,[\,\underset{bcde}{\triangle^4} f(a) + (A + B + C + D + E)\underset{bcdef}{\triangle^5} f(a) \ldots\ldots]$$
$$= \underline{24}$$

பயிற்சி 9

1. நியூட்டனின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்திலிருந்து, அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட சார்பின் வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கண்டுபிடிக்க ஒரு சூத்திரத்தை நிறுவுக.

கீழ்க் கண்ட அட்டவணையிலிருந்து f' (0·85)-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

x	$f\ (x)$
0	0·12750
0·2	0·13327
0·4	0·13941
0·6	0·14590
0·8	0·15275
1·0	0·15996

2. கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $f'(505)$, $f''(505)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
500	6·214608
510	6·234411
520	6 253829
530	6·272877
540	6·291569

3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகளிலிருந்து $f'(0)$, $f''(0)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	858·313740095
1	869·645772308
2	880·975826766
3	892·303904583
4	903·630006875

4. $x=0{\cdot}4$, $x=0{\cdot}43$ ஆகிய இரண்டு இடங்களில் முதலிரு வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து கணக்கிடு.

x	$f(x)$
0·4	1·5836494
0·5	1·7974426
0·6	2·0442376
0·7	2·3275054
0·8	2·6510818

5. கீழ்க்காணும் சார்பிலிருந்து $f'(0)$-ன் மதிப்பினைத் தோராயமாக மதிப்பிடு.

x	$f(x)$
0	488
1	516
2	545
3	574
4	602
5	630
6	658
7	686
8	714
9	742

(ஏப்ரல் 1967)

6. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $f'(0{\cdot}03)$, $f''(0{\cdot}03)$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

x	$f(x)$
0·00	0·8862
0·01	0·8762
0·02	0·8662
0·03	0·8542
0·04	0·8463
0·05	0·8363

7. $f(x)$, கீழ்க்காணுமாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$
0	276
3	460
5	414
6	343
8	110

$f(2)$ ன் மதிப்பினைக் காண்க. மேலும் $f''(2)$ ன் மதிப்பினைக் கண்டுபிடி.

8. அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பு e^{-x} லிருந்து $x = 1{\cdot}3$ என்னுமிடத்தில் முதலிரு வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கண்டுபிடி.

x	$f(x) = e^{-x}$
1·1	0·3329
1·2	0·3012
1·5	0·2231
1·7	0 1827

9. $\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \delta f(x) - \frac{1}{24}\delta^3 f(x) + \frac{3}{640}\delta^5 f(x) - \ldots\ldots$$

என நிரூபி.

10. $f(x)$ கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$
0	768
1	913
2	1039
3	1143
4	1225

$f'(0)$ ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

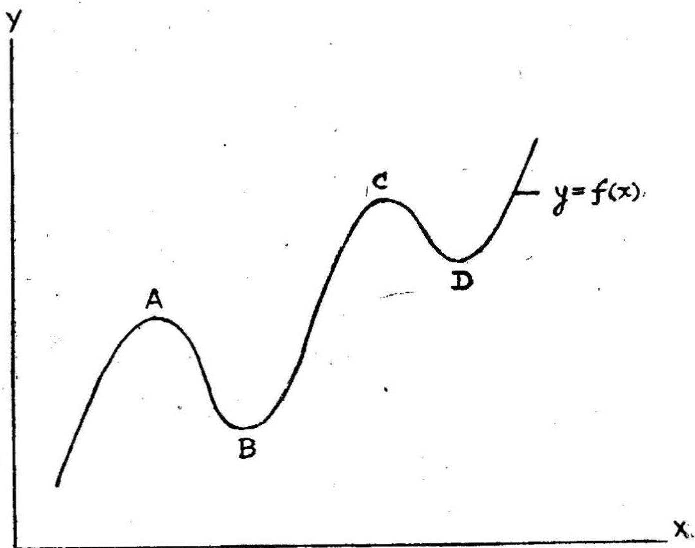
10. உச்சமும் நீசமும்

(Maxima and Minima)

ஒரு சார்பு சில இடங்களில் உச்ச மதிப்பினையும், நீச மதிப்பினையும் மாறி மாறி அடைகின்றது. சார்பினை $f(x)$ என எழுதுகிறோம். $f(x)$ என்னும் சார்பு $x = a$ என்னுமிடத்தில் உச்சத்தை அடையுமானால், சார்பின் மதிப்பு, a யின் இரு புறங்களிலும் $f(a)$ ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும். இதனையே h என்பது மிகச் சிறிய நேரெண்ணாக இருக்கும் பொழுது $f(a - h) < f(a) > f(a + h)$ எனக் குறிக்கின்றோம். இது போலவே $f(x)$ ஆனது $x = b$ என்னுமிடத்தில் நீசத்தையடையும்பொழுது அப்புள்ளியின் இரு பக்கங்களிலும் சார்பின் மதிப்பு அதிகமாக இருக்கும். இதனையே

$$f(b - h) > f(b) < f(b + h) \text{ என}$$

எழுதுகின்றோம். சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் கீழேயுள்ள படத்திலிருந்து கணக்கிடலாம்.



படம் 8

$f(x)$ என்னும் சார்பு A, C ஆகிய இரண்டு இடங்களில் உச்சத்தையும், B, D ஆகிய இரண்டு இடங்களில் நீசத்தையும் அடைவதைக் காண்கிறோம். மேலும் D என்னுமிடத்தில் உள்ள நீச மதிப்பு, A என்னுமிடத்தில் உள்ள உச்ச மதிப்பினை விட அதிகமாக உள்ளதையும் காண்கின்றோம்.

எனவே, $f(a)$ உச்சமாக இருக்கும்பொழுது, x, $a-h$ லிருந்து a க்குக் கூடும்பொழுது, $f(x)$ இன் மதிப்பும் $f(a)$ வரை அதிகரிக்கின்றது. அப்பொழுது $\frac{d\,f(x)}{dx}$, $(+ve)$ நேரெண்ணாக இருக்கின்றது. மேலும் x, a யிலிருந்து $(a+h)$ க்கு மாறும் பொழுது, $f(x)$ குறைகின்றது: $\frac{d\,f(x)}{dx}$, எதிரெண்ணாக $(-ve)$ உள்ளது. எனவே x, $(a-h)$ யிலிருந்து $(a+h)$ க்கு அதிகரிக்கும்பொழுது $\frac{d\,f(x)}{dx}$ ஆனது நேரெண்ணிலிருந்து பூச்சியம் வழியாக எதிரெண்ணுக்கு மாறுகின்றது. இதுபோலவே சார்பு நீசத்தையடையும் பொழுது, $\frac{d\,f(x)}{dx}$, எதிரெண்ணிலிருந்து பூச்சியம் வழியாக நேரெண்ணிற்கு மாறுகின்றது. ஆகவே $f(x)$ உச்சத்தையோ நீசத்தையோ அடையுமாயின், அந்த இடத்தில் அச்சார்பின் முதற்படி வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தின் மதிப்பு 0 ஆக இருத்தல் வேண்டும். மேலும் இரண்டாம் படி வகை வேறுபாட்டுக் குணகம் எதிரெண்ணாகவோ, நேரெண்ணாகவோ இருத்தல் அவசியம். இக் குணகம் எதிரெண்ணாக இருக்குமாயின், அந்த இடத்தில் $f(x)$, உச்சத்தையும், நேரெண்ணாக இருந்தால் நீசத்தையும் அடைந்துள்ளது என அறிந்து கொள்ளலாம்.

ஆகவே ஒரு சார்பு எந்தெந்த இடங்களில் உச்சத்தையும் எந்தெந்த இடங்களில் நீசத்தையும் அடைகின்றது என்பதனைக் காண அச்சார்பினை வகைப்படுத்தி 0 க்குச் சமன்படுத்த வேண்டும். அதாவது $f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறவேண்டும். பிறகு இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். அதன்பிறகு சார்பின் இரண்டாம் படி வகை வேறுபாட்டினை அதாவது $f''(x)$ னைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$f''(x)$ இல், x க்கு, முன்னர் கண்டுபிடித்த மூலங்களைப் பிரதியிட வேண்டும். இவ்விரண்டாம் படி வகை வேறு

பாட்டுக் குணகம் எந்தெந்த மூலங்களுக்கு, எதிரெண்ணுக இருக்கின்றதோ, அம்மூலங்களின் மதிப்புள்ள இடங்களில் சார்பு உச்சத்தையும், எந்தெந்த மூலங்களைப் பிரதியிடும் பொழுது நேரெண்ணுக இருக்கின்றதோ அம்மூலங்களின் மதிப்புள்ள இடங்களில் நீசத்தையும் அடைகின்றது. அதாவது $f(x)$ உச்சத்தையோ அல்லது நீசத்தையோ அடைய

$$f'(x) = 0$$ ஆக இருத்தல் அவசியம்.

$x = a$ என்னுமிடத்தில் உச்சத்தை யடையுமாயின் $f''(x)\,\Big]_{x=a} = (-\text{ve})$ எதிரெண்ணுகவும் $x = b$ என்னுமிடத்தில் நீசத்தை யடையுமாயின்

$f''(x)\,\Big]_{x=b} = (+\text{ve})$ நேரெண்ணுகவும் இருக்கும்.

இதுபோலவே மற்ற இடங்களில் உள்ள உச்ச நீச மதிப்புகளைப் பெறலாம். சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைப் பெற, $f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $f(x)$ இல் பிரதியிட வேண்டும்.

மேலே கூறிய முறையில், நுண்ணியற் கணக்கில் $f(x)$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது அதன் உச்ச நீச மதிப்புகளைப் பெறுகின்றோம். ஆனல் எண்ணியல் முறையில், சார்பின் அமைப்பு கொடுக்கப்பட மாட்டாது. ஆனல் அச் சார்பின் மதிப்புகள் சில குறிப்பிட்ட இடங்களில் சம இடைவெளியிலோ அல்லது அசம இடை வெளியிலோ, கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$
$a+4h$	$f(a+4h)$
$a+5h$	$f(a+5h)$

இன்னணம் சார்பு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது, இடைச் செருகல் சூத்திரங்களில் ஏதாவது ஒன்றினை உபயோகித்து $f(x)$ இனை மதிப்பிட வேண்டும். பின் இச் சார்பினை வகைப்படுத்தி 0 க்குச் சமன்படுத்த வேண்டும். இதன் மூலங்களைக் கணக்கிட்டு, இரண்டாம் படி வகை வேறு பாட்டில் மூலங்களைப் பிரதியிட்டு, சார்பு எந்தெந்த இடங் களில் உச்ச நீச மதிப்புகளை அடைந்துள்ளது என அறிந்து, அவைகளைக் கணக்கிடலாம். சார்பினை மதிப்பிட்டு வகைப் படுத்துவதைக் காட்டிலும், வகைப்படுத்தப்பட்ட இடைச் செருகல் சூத்திரங்களில், அதாவது எண்ணியல் வகை வேறு பாட்டு சூத்திரங்களில், வேறுபாட்டட்டவணையிலிருந்து வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிடும் பொழுது $f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுவது எளிது. மேலும் நியூட்டன், ஸ்டெர்லிங், நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாடுகள் ஆகிய இடைச் செருகல் சூத்திரங்களிலிருந்து வருவிக்கப்பட்ட எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டு சூத்திரங்களை உபயோகித்து $f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினைப் பெறுகின்றோம். உச்ச நீச மதிப்புள்ள இடங்களைக் கண்டபிறகு அதனைச் சார்பில் பிரதியிட்டு அதாவது இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை உபயோ கித்துச் சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் கணிக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	0
1	0·25
2	0
3	2·25
4	16·00
5	56·25

சார்பு சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருப்பதால் நியூட்டனின் அல்லது ஸ்டெர்லிங்கின் எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டு சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f'(x) = 0$ ஐப் பெறலாம்.

நியூட்டனின் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது :

$$f'(x) = \triangle f(0) + \frac{2x-1}{2} \triangle^2 f(0) + \frac{3x^2-6x+2}{6} \triangle^3 f(0)$$

$$+ \frac{1}{24}(4x^3 - 18x^2 + 22x - 6) \triangle^4 f(0) + \ldots\ldots$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண, சார்பின் வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்தல் வேண்டும்.

X	x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
−2	0	0				
			0·25			
−1	1	0·25		−0·50		
			−0·25		3·0	
0	2	0		2·50		6
			2·25		9·0	
1	3	2·25		11·50		6
			13·75		15·0	
2	4	16·00		26·50		
			40·25			
3	5	56·25				

இவ்வட்டவணையிலிருந்து வேறுபாடுகளுக்கு மேலே உள்ள சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$f'(x) = 0{\cdot}25 + \frac{2x-1}{2}(-0{\cdot}50) + \frac{1}{6}(3x^2 - 6x + 2)(3{\cdot}0)$$

$$+ \frac{1}{24}(4x^3 - 18x^2 + 22x - 6)(6)$$

இதனைச் சுருக்க,

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

இதனைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்தி மூலங்களைக் காண வேண்டும்.

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$
$$= x(x-1)(x-2) = 0$$

$\therefore \quad x = 0, 1, 2$ ஆகிய மூன்று மூலங்கள் உள்ளன.

இவ்விடங்களில்தான் சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகள் அமைந்துள்ளன. சார்பின் இரண்டாம் வகை வேறு பாடானது,

$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2$. இதில் முன்னர் கணக்கிட்ட மூலங் களைப் பிரதியிடும் பொழுது

$$f''(0) = 2$$
$$f''(2) = 2$$

இக்குணகங்கள் நேரெண்ணாக இருப்பதால் இச்சார்பு $x = 0$, $x = 2$ ஆகிய இரண்டு இடங்களிலும் நீசத்தையடை கின்றது. ஆனால்

$f''(1) = -1$. எனவே இக்குணகம் எதிரெண்ணாக, $x=1$ என்னுமிடத்தில் சார்பு உச்ச மதிப்பினை அடைகின்றது. இப் பொழுது சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைப் பெற வேண்டும்.

உச்ச மதிப்பாவது, $f(1) = 0{\cdot}25$ ஆகும்.

நீச மதிப்புகளாவன, $f(0) = 0$

$f(2) = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2: மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார் பின் உச்ச நீச மதிப்புகளை, ஸ்டெர்லிங் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்தும் கணக்கிடலாம். இங்கு முதல் நிலையை (origin) $x = 2$ என்னுமிடத்தில் எடுக்க $X = x - 2$ என்னும் புதிய மாறியினைப் பெறுகின்றோம். ஸ்டெர்லிங் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f'(X) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெற்று, X இனை வைத்துச் சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகள் பெறப்படுகின்றன.

ஸ்டெர்லிங் இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது

$$f(X) = f(0) + X\mu\delta f(0) + \frac{X^2}{2!}\delta^2 f(0)$$
$$+ \frac{X(X^2-1)}{3!}\mu\delta^3 f(0) + \frac{X^2(X^2-1)}{4!}\delta^4 f(0) + \ldots\ldots$$

ஸ்டெர்லிங் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரமாவது,

$$f'(X) = \mu\,\delta f(0) + X\,\delta^2 f(0) + \frac{3X^2-1}{6}\mu\,\delta^3 f(0) + \frac{4x^3-2x^2}{24}\delta^4 f(0) + \ldots\ldots$$

அதே வேறுபாட்டட்டவணையிலிருந்து மைய வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிடவும்.

$$f'(X) = 1 + 2{\cdot}5\,X + \frac{3X^2-1}{6}\times 6 + \frac{4X^3-2X^2}{24}.\,6$$

$$= X^3 + 3X^2 + 2X$$

$\therefore\ f'(X) = X^3 + 3X^2 + 2X = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், உச்ச நீச மதிப்புகள் அமைந்துள்ள இடங்களைக் காட்டும். இந்தச் சமன்பாட்டிற்கு

$X = 0,\ -1,\ -2$ என்னும் மூன்று மூலங்கள் உள்ளன. இந்த மூன்று இடங்களில் சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகள் உள்ளன. உச்சமா அல்லது நீசமா எனக்காண இரண்டாம் படி வகை வேறுபாட்டுக் குணகத்தை உபயோகிக்கின்றோம்.

$f''(X) = 3X^2 + 6X + 2.$ இதில் மூலங்களைப் பிரதியிடவும்.

$$f''(0) = +2 \text{ -- நேரெண்}$$
$$f''(-2) = +2 \text{ -- நேரெண்}$$

$\therefore\ X = 0,\ -2$ ஆகிய இரண்டு இடங்களில் சார்பு நீச மதிப்புகளை அடைகின்றது. அந்நீச மதிப்புகளாவன :

$$f(0) = 0$$
$$f(-2) = 0$$

மேலும் $f''(-1) = -1$ (எதிரெண்). $\therefore\ X = -1$ என்னுமிடத்தில் $f(x)$ உச்ச மதிப்பைப் பெறுகின்றது.

உச்ச மதிப்பாவது, $f(-1) = 0{\cdot}25$

அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இடங்களில் சார்பு உச்ச நீச மதிப்புகளை அடையாவிடின், இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை உபயோகித்து, அம் மதிப்புகளைப் பெற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்.

x	$f(x)$
0	0
1	9
2	16
3	9
4	0
5	25
6	144

சார்பு சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருப்பதால், நியூட்டனின் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை யாவது அல்லது ஸ்டெர்லிங்கின் சூத்திரத்தையாவது உபயோகித்து

$f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

$$f'(x) = \Delta f(0) + \frac{2x-1}{2} \Delta^2 f(0) + \frac{3x^2-6x+2}{6} \Delta^3 f(0)$$

$$+ \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24} \Delta^4 f(0) + \ldots\ldots$$

இச் சமன்பாட்டின் வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைப் பெற, வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்தல் வேண்டும்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
0	0				
		9			
1	9		−2		
		7		−12	
2	16		−14		24
		−7		12	
3	9		−2		24
		−9		36	
4	0		34		24
		25		60	
5	25		94		
		119			
6	144				

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில், வேறுபாடுகளுக்கு இவ் வட்டவணையிலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$f'(x) = 9 + \frac{2x-1}{2} \times (-2) + \frac{3x^2-6x+2}{6}(-12) + \frac{4x^3-18x^2+22x-6}{24} \times 24$$

$$= 4x^3 - 24x^2 + 32x.$$ இதனைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = 0.$$

$$f'(x) = x(x-2)(x-4) = 0$$

∴ இச் சமன்பாட்டிற்கு $x = 0, 2, 4$ ஆகிய மூன்று மூலங்கள் உள்ளன. இப்புள்ளிகளில் சார்பின் இரண்டாம் படி வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களைக் கணக்கிட்டு உச்சநீச மதிப்புகள் உள்ள இடங்களை அறியலாம்.

$f''(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(0) = 8$ (நேரெண்)

$f''(4) = 8$ (நேரெண்)

எனவே $x = 0, 4$ ஆகிய இடங்களில் சார்பு நீச மதிப்பினைப் பெறுகின்றது.

நீச மதிப்புகளாவன : $f(0) = 0, f(4) = 0$.

மேலும் $f''(2) = -4$. எதிரெண்ணாகும்: அதனால் $x = 2$ என்னுமிடத்தில் சார்பு உச்சமதிப்பினைப் பெறுகின்றது. உச்ச மதிப்பாவது :

$f(2) = 16$

சார்பு அசம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருந்தால், நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு, வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f'(x) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பெற்று, மேலே உபயோகித்த முறையைப் பின்பற்றி உச்ச நீச மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 10–ல் உள்ள 6-வது கணக்கைக் கருதுக. இதில் சார்பு $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச் சார்பிற்குரிய சார்பலன்களை x-ன் 2, 2·1, 2·2, 2·3, 2·4, 2·5, 2·6, ... 3·0 என்ற மதிப்புகளுக்குக் காண்க. இவ்வாறு சார் பலன்களைக் காணும் முறையைப் பகுதி 1–ல் 45-ஆம் பக்கத்தில் மாதிரி 1-ல் காணலாம்.

பிறகு வேறுபாட்டு அட்டவணை அமைத்து முன்போலவே $x = 2·5$-க்கு அருகில் உள்ள நீச மதிப்பினைக் காணலாம்.

இங்குச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் அதை வகைப் படுத்தி (by differentiating) அதை $(f'(x))$ பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தியும் நீச மதிப்பினைக் காணலாம். இதற்கு $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. பின்னர் இவ்விரு முறைகளிலும் கண்ட நீச மதிப்புகளைச் சரிபார்.

பயிற்சி 10

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

x	$f(x)$
−2	2·00
−1	−0·25
0	0
1	−0·25
2	2·00
3	15·75
4	56·00

(ஏப்ரல் 1959)

2. கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்ட சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளை மதிப்பிடு.

x	$f(x)$
0	0
1	0·25
2	0·10
3	−0·20
4	0
5	3·0

(செப். 1960)

3. $f(x)$-இன் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்.

x	$f(x)$
1	2·25
2	2·40
3	2·38
4	0·30
5	– 0·27
6	0
7	0·70
8	0·68
9	0·50
10	0·23

4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து $f(x)$-இன் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்.

x	$f(x)$
0·4	– 3·26
0·6	– 0·82
0·8	0·35
1·0	1·38
1·2	2·62
1·4	0·65
1·6	0·02
1·8	
2·0	0

(ஏப்ரல் 1963)

5. சார்பின் உச்ச நீச மதிப்புகளைக் காண்.

x	$f(x)$
0	1·23
0·2	0·32
0·4	– 0·35
0·6	– 0·05
0·8	0·08
1·0	1·25
0·2	1·01
1·4	0

(செப். 1963)

6. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ என்னும் சார்பினை $(2 \leq x \leq 3)$, $\triangle x = 0{\cdot}1$ சம இடைவெளியில் அட்டவணைப்படுத்து. அவ் வட்டவணையிலிருந்து $x = 2{\cdot}5$ க்கு அருகில் உள்ள, சார்பின் நீச மதிப்பினைக் கண்டுபிடி. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பினை வகைப்படுத்தி, பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்து. இச் சமன் பாட்டை $f'(x) = 0$ தீர்த்து, நீச மதிப்பினைக் கண்டுபிடி. இதனை முதலில் கணக்கிட்ட மதிப்போடு ஒப்பிட்டுச் சரிபார். (ஏப்ரல் 1965)

7. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் நீச மதிப்பினைக் காண்.

x	$f(x)$
0	890
1	844
2	769
3	668
4	541
5	389
6	401
7	462
8	495
9	530

(ஏப்ரல் 1967)

8. இரண்டாம்படி வேறுபாடுகள் சார்பு Γx இல் மாறிலி எனக் கொண்டு, சார்பு எந்த இடத்தில் நீச மதிப்பைப் பெறுகின்றது எனக் காண்.

x	$f(x) = 10 + \log \Gamma x$
1·45	9·9412677
1·46	9·9472397
1·47	9·9472359

(ஏப்ரல் 1962)

9. சார்பின் நீச மதிப்பினைக் காண்

x	$f(x)$
0·2	0·9182
0·3	0·8975
0·4	0·8873
0·5	0·8862
0·6	0·8935
0·7	0·9086

10. $f(x)$ இன் மதிப்புகள் a, b, c என்னுமிடங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அதனுடைய உச்ச மதிப்போ அல்லது நீச மதிப்போ

$$x = \frac{f(a)(b^2 - c^2) + f(b)(c^2 - a^2) + f(c)(a^2 - b^2)}{2[f(a)(b - c) + f(b)(c - a) + f(c)(a - b)]}$$

என்னுமிடத்தில் அமைந்துள்ளது என நிரூபி.

குறிப்பு : இலக்ராஞ்ஜின் இடைச்செருகல் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f(x)$ னைக் காண். பிறகு அதனை ஒருமுறை x னை வைத்து வகைப்படுத்தி, பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்தி, மூலத்தைக் காண்க. அதன் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பாகும்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
b	$f(b)$
c	$f(c)$

11. எண்சார் தொகை காணல்

(Numerical Integration)

தொகை நுண்கணிதத்தில் தொகைச்சார்பு கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். அதாவது சார்பின் அமைப்பு (form of the integrand) நமக்குத் தெரியும். அப்பொழுது தொகைச் சார்புக் கேற்று குறிப்பிட்ட முறைகளை உபயோகித்துத் தொகை காணலாம். ஆனல் சார்பின் மதிப்புகள் சில குறிப்பிட்ட இடங்களில் சம இடைவெளியில் அல்லது அசம இடை வெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது தொகை காணும் முறைக்கு 'எண்சார் தொகை காணல்' என்று பெயர். இங்கு இடைச் செருகல் சூத்திரங்களை உப யோகப்படுத்தி சார்புகளை நிறுவி அவைகளைத் தொகைப் படுத்துகின்ருேம்.

உதாரணமாக $y = f(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்பொழுது

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$
$a+4h$	$f(a+4h)$
$\vdots$	$\vdots$
$a+rh$	$f(a+rh)$

$(r+1)$ மதிப்புகள் உள்ளதால், அதனை 'r' ஆவதுபடி பல்லுறுப்புக் கோவையாக நிறுவுகின்றோம். பிறகு $f(x)$ ஐத் தொகைப்படுத்தி, வரையறையிட்டுத் தொகையின் மதிப்பினை அடைகின்றோம். ஆனால் சார்புகளை மதிப்பிட உபயோகிக்கும் இடைச்செருகல் சூத்திரங்களை வரையறைக்குள் தொகைப்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகளையும் பிரதியிட்டுத் தொகை காணலாம். எனவே இடைச் செருகல் சூத்திரங்களைத் தொகைப்படுத்தி எண்சார் தொகை சூத்திரங்களைப் பெறுகின்றோம். இவைகள் 'Quadrature Formulae' என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

மேலே கண்டவாறு தொகைச் சார்பு சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருந்தால் நியூட்டனின் முன்னணி வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து சார்பினை நிறுவலாம். அச்சூத்திரத்தை a யிலிருந்து $(a+rh)$ க்குள் தொகைப்படுத்தினுல் பொது எண்சார் தொகைச் சூத்திரம் கிடைக்கின்றது.

நியூட்டனின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைக் கவனிக்கவும்.

$$(11{\cdot}1)\quad f(a+xh) = f(a) + x\,\triangle f(a) + \frac{x(x-1)}{2}\,\triangle^2 f(a)$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\,\triangle^3 f(a)$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\,\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots$$

$a+xh = \mathrm{X}$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$h\,dx = d\mathrm{X}$ ஆகும். தொகையின் வரையறையும் மாறுகின்றது.

$\mathrm{X} = a$ ஆக இருக்கும் பொழுது $x = 0$ ஆகவும்

$\mathrm{X} = a+rh$ ஆக இருக்கும் பொழுது $x = r$ ஆகவும் உள்ளது. (11·1) வது சமன்பாட்டைத் தொகைப்படுத்தவும்.

$$\int_a^{a+rh} f(X)\,dX = h\left[\int_0^r \left\{f(a) + x \triangle f(a) + \frac{x(x-1)}{2}\triangle^2 f(a)\right.\right.$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\triangle^3 f(a)$$

$$\left.\left. + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots\right\} dx\right]$$

$$= h\left[x f(a) + \frac{x^2}{2}\triangle f(a) + \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}}{2\,!}\triangle^2 f(a)\right.$$

$$+ \frac{\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2}{3\,!}\triangle^3 f(a)$$

$$\left. + \left(\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{2} + 11\frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots\right]_0^r$$

வரையறைகளைப் பிரதியிடவும். $[x = r,\ x = 0]$

$$(11{\cdot}2)\quad \therefore \int_a^{a+rh} f(X)\,dX = h\left[r f(a) + \frac{r^2}{2}\triangle f(a)\right.$$

$$+ \left(\frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{4}\right)\triangle^2 f(a)$$

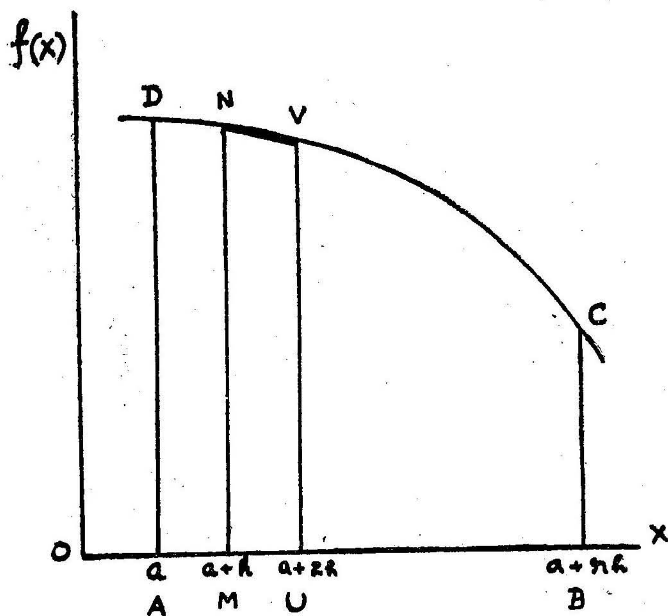
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{r^4}{4} - r^3 + r^2\right)\triangle^3 f(a)$$

$$\left. + \left(\frac{r^5}{5} - \frac{3}{2}r^4 + \frac{11}{3}r^3 - 3r^2\right)\triangle^4 f(a) + \ldots\ldots\right]$$

தொகைச் சார்பின் $(r+1)$ மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருந்தால் வரையுட்படு தொகை காண இச்சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தலாம்.

$\triangle^n \equiv (E-1)^n$ என்னும் சமன்பாட்டை உபயோகித்து வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாகச் சார்பின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகளை ஒரு வரை



படம் 9

படத்தில் குறித்து அப்புள்ளிகளை இணைக்க மேல் கண்டவாறு வரைபடம் அமையும். இங்கு வரையுட் படுதொகை $\int_a^{a+rh} f(X)\,dX$ என்பது, $y=f(x)$ என்னும் வரை கோட்டிற்கும், x அச்சுக்கும், $f(a)$ க்கும் $f(a+rh)$ க்கும் இடையேயுள்ள பரப்பளவாகும். அந்தப் பரப்பளவானது,

$$(11{\cdot}3)\ \text{பரப்பு ABCD} = \int_a^{a+rh} f(X)\,dX =$$

$$\frac{1}{2} h\,[f(a)+f(a+h)]$$

$$+\frac{1}{2}h\,[f(a+h)+f(a+2h)]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2}h\,[f(a+\overline{r-1}\,h)+f(a+rh)]$$

$$+\,C$$

இங்கு C என்பது, சரிவகத்தில் கருமையாக்கப்பட்டிருக்கும் பரப்பளவைப் போன்ற, எல்லாச் சரிவகங்களிலுள்ள பரப்புகளின் கூட்டுத் தொகையாகும். C யின் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டால் தொகையின் சரியான மதிப்பைப் பெறலாம். C ன் மதிப்பினைப் பெறும் முறையைப் பின்னல் படிப்போம். அதற்கு முன், தொகைச் சார்பின் 2, 3, 4, 6 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது சில குறிப்பிட்ட தொகைச் சூத்திரங்களை நிறுவி, தொகை காணும் முறையைப் பார்ப்போம். பொது எண்சார் தொகைச் சூத்திரத்தில் (11·2) $r = 1, 2, 3, 6$ என மதிப்பிட்டால் கீழ்க்கண்ட விதிகளை முறையே பெறுகின்றோம்.

1. கோடகம் சார்ந்த விதி (Trapezoidal Rule)

2. சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதி (Simpson's $\frac{1}{3}$rd Rule)

3. சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதி (Simpson's three-eighth Rule)

4. வெடிலின் விதி (Weddle's Rule)

1. கோடகம் சார்ந்த விதி :

தொகைச் சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருந்தால், $r = 1$ எனப் பொதுத் தொகைச் சூத்திரத்தில் (11·2) பிரதியிடவும்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$

$$\int_a^{a+h} f(X)\, dX = h\,[f(a) + \triangle f(a)]$$

இதில் $\triangle f(a) = (E-1) f(a)$

$= f(a+h) - f(a)$ ஆகும்.

இதனை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\int_a^{a+h} f(X)\, dX = h\left[f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{2}\right]$$

(11·4). $$= \frac{h}{2}\,[f(a) + f(a+h)]$$

இதனைக் கோடகம் சார்ந்த விதி என அழைக்கின்றோம். இது படத்தில் முதல் சரிவகம் AMND யின் பரப்பளவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$f(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

$\int_1^3 f(x)\, dx$ ன் மதிப்பினைக் காண்க.

x	$f(x)$
1	6
3	16

கோடகம் சார்ந்த விதியினை உபயோகித்து வரையுட்படு தொகையைக் காணலாம். இவ்விதியில் $a=1$, $a+h=3$, $h=2$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \int_1^3 f(x)\, dx = \frac{h}{2}\,[f(a) + f(a+h)]$$

$$= \frac{2}{2}\,[16+6] = 22 \text{ சதுர அலகுகள்.}$$

2. சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதி :

தொகைச் சார்பின் மூன்று மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் இவ் விதியை உபயோகித்து தொகை காண வேண்டும். பொதுச் சூத்திரத்தில் (11·2) $r=2$ எனப் பிரதியிட, சிம்ஸனின் விதியினைப் பெறலாம். சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$

$$\int_a^{a+2h} f(X)\,dX = h\left[f(a)+2\triangle f(a)+\left(\frac{8}{3}-2\right)\frac{1}{2}\triangle^2 f(a)\right]$$

சார்பின் மதிப்புகள் மூலம், வேறுபாடுகளை நீக்கவும்.

$$\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$$
$$\triangle^2 f(a) = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$$

இவைகளை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \int_a^{a+2h} f(X)\,dX = h\,[f(a) + 2\{f(a+h) - f(a)\}$$
$$+\left(\frac{8}{3}-2\right)\frac{1}{2}\{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)\}]$$

$$(11\cdot5) \quad \therefore \int_a^{a+2h} f(X)\,dX = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)$$

இதற்கு சிம்ஸனின் $\frac{1}{3}$ ஆவது விதி என்று பெயர்.

இதுபோலவே

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(X)\, dX = \frac{h}{3}[f(a+2h) + 4f(a+3h) + f(a+4h)]$$

$$\int_{a+\overline{r-2}h}^{a+rh} f(X)\, dX = \frac{h}{3}[f(a+\overline{r-2}\,h) + 4f(a+\overline{r-1}\,h) + f(a+rh)]$$

r ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருக்கும்பொழுது

$$\int_{a}^{a+rh} f(X)\, dX = \int_{a}^{a+2h} f(X)\, dX + \int_{a+2h}^{a+4h} f(X)\, dX + \ldots\ldots + \int_{a+\overline{r-2}\,h}^{a+rh} f(X)\, dX$$

இத் தொகைகளைக் கூட்ட சிம்ஸனின் நீட்பு விதி (Extension Rule) அமைகின்றது. வலதுபுறத்தில் ஒவ்வொரு தொகைக்கும் சிம்ஸனின் விதியிலுள்ள மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுக் கூட்டவும்.

$$(11\cdot6) \quad \int_{a}^{a+rh} f(X)\, dX = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \ldots\ldots 4f(a+\overline{r-1}\,h) + f(a+rh)]$$

சார்பின் நான்கு மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதியினை உபயோகிக்கிறோம். பொதுச் சூத்திரத்தில் (11·2), $r=3$ எனப் பிரதியிடவும். சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருக்கும்.

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$a+3h$	$f(a+3h)$

$$\int_a^{a+3h} f(X)\,dX = h\left[3f(a) + \frac{9}{2}\triangle f(a) + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\times \triangle^2 f(a) + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\triangle^3 f(a)\right]$$

வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாகக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை உபயோகித்துச் சார்பின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\triangle f(a) = f(a+h) - f(a)$$
$$\triangle^2 f(a) = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$$
$$\triangle^3 f(a) = f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)$$

இம் மதிப்புகளை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுச் சுருக்கவும்.

$$(11{\cdot}7) \quad \therefore \int_a^{a+3h} f(X)\,dX = \tfrac{3}{8}h\,[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)]$$

இதனை சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ ஆவது விதி என அழைக்கின்றோம்.

வெடிலின் விதி : சார்பின் ஏழு மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது அதன் வரையுட்படு தொகையைக் காண வெடிலின் விதியைப் பயன்படுத்துகின்றோம். பொதுச் சூத்திரத்தில் (11·2) $r=6$ எனப் பிரதியிட்டு, வேறுபாடுகளுக்குப்பதிலாகச் சார்பின் மதிப்புகளை எழுதினால் இவ்விதியைப் பெறலாம்.

$$\therefore \int_a^{a+6h} f(X)\,dX = h\,[6f(a) + 18\triangle f(a) + 24\triangle^2 f(a) + 29\triangle^3 f(a) + \frac{123}{10}\triangle^4 f(a) + \frac{33}{10}\triangle^5 f(a) + \frac{41}{140}\triangle^6 f(a)]$$

இதில் இறுதி உறுப்பில் ஒரு சிறிய மாற்றத்தைச் செய்கிறோம். $\frac{41}{140}\triangle^6 f(a)$ என்பதற்குப் பதிலாக $\frac{42}{140}\triangle^6 f(a)$ என எடுத்துக் கொள்வதனால் மிக எளிதாக இச் சமன்பாட்டைச் சுருக்கலாம். இங்கு இம் மாற்றத்தில் $\frac{1}{140}\triangle^6 f(a)$-ஐக் கூட்டு

கின்றோம். இதனால் மதிப்பு மாறாது: காரணம் $\Delta^6 f(a)$ என்பதே மிகச் சிறியது; அதிலும் $\frac{1}{140}\Delta^6 f(a)$ மிக மிகச் சிறியது. எனவே $\frac{1}{140}\Delta^6 f(a)$ என்பது தோராயமாக 0 எனக் கொள்ளலாம். இம் மாற்றத்தினால் இறுதி உறுப்பினை $\frac{3}{10}\Delta^6 f(a)$ என எழுத இயலுகின்றது.

$$\therefore \int_a^{a+6h} f(X)\,dX = h\,[\,6f(a) + 18\Delta f(a) + 27\Delta^2 f(a) + 24\Delta^3 f(a) + \frac{123}{10}\Delta^4 f(a) + \frac{33}{10}\Delta^5 f(a) + \frac{3}{10}\Delta^6 f(a)\,]$$

வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாகச் சார்பின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

$$\Delta^2 f(a) = f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)$$

$$\Delta^3 f(a) = f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)$$

$$\Delta^4 f(a) = f(a+4h) - 4f(a+3h) + 6f(a+2h) - 4f(a+h) + f(a)$$

$$\Delta^6 f(a) = [\,f(a+6h) - 6f(a+5h) + 15f(a+4h) - 20f(a+3h) + 15f(a+2h) - 6f(a+h) + f(a)\,]$$

இவைகளை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுச் சுருக்க வெடிலின் விதி கிடைக்கின்றது.

$$(11{\cdot}8)\quad \int_a^{a+6h} f(X)\,dX = \frac{3}{10}h\,[\,\{f(a) + f(a+6h)\} + 5\{f(a+h) + f(a+5h)\} + \{f(a+2h) + f(a+4h)\} + 6f(a+3h)\,]$$

இவ்விதியினை, ஸ்டெர்லிங்கின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை வரையறைக்குள் தொகைப் படுத்தியும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$f(x)$, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

$\int_{1\cdot1}^{1\cdot9} f(x)\,dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	x	$f(x)$
a	1·1	3·95254
$a+h$	1·2	4·06587
$a+2h$	1·3	4·18162
$a+3h$	1·4	4·29982
$a+4h$	1·5	4·42051
$a+5h$	1 6	4·54372
$a+6h$	1·7	4·66949
$a+7h$	1·8	4·80135
$a+8h$	1·9	5·02365

சிம்ஸனின் நீட்பு விதியினை (11·6) ப் பயன்படுத்தித் தொகையைக் கணக்கிடலாம்.

$$\int_{1\cdot1}^{1\cdot9} f(x)\,dx = \int_{1\cdot1}^{1\cdot3} f(x)\,dx + \int_{1\cdot3}^{1\cdot5} f(x)\,dx + \int_{1\cdot5}^{1\cdot7} f(x)\,dx + \int_{1\cdot7}^{1\cdot9} f(x)\,dx$$

$$\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots\ldots + 4f(a+\overline{r-1}\,h)+f(a+rh)]$$

இதில் $a = 1\cdot1$, $h = 0\cdot1$, $r = 8$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_{1\cdot1}^{1\cdot9} f(x)\,dx = \frac{0\cdot1}{3}[f(1\cdot1) + 4f(1\cdot2) + 2f(1\cdot3)$$

$$+ 4f(1\cdot4)+2f(1\cdot5)+4f(1\cdot6)+2f(1\cdot7)+4f(1\cdot8)+f(1\cdot9)]$$

$$= \frac{0\cdot1}{3}[3\cdot95254 + 4(4\cdot06587) + 2(4\cdot18162)$$

$$+ \ldots\ldots + 5\cdot02365]$$

$$\int_{1\cdot1}^{1\cdot9} f(x)\,dx = \underline{3\cdot545416}$$

எடுத்துக் காட்டு 3 :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ என்னும் தொகையில், சார்பின் ஏழு மதிப்புகளைச் சம இடைவெளியில் கணக்கிடு. வெடிலின் விதியை உபயோகித்துத் தொகையைக் காண்க. (செப். 1960)

இங்கு $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. இதனை 0-க்கும் 1-க்கு மிடையே $f(x)$, 7 புள்ளிகளில் அட்டவணைப்படுத்தவும்.

x	x	$f(x)$
a	0	1·00000
$a+h$	$\frac{1}{6}$	0·96216
$a+2h$	$\frac{2}{6}$	0·90000
$a+3h$	$\frac{3}{6}$	0·80000
$a+4h$	$\frac{4}{6}$	0·69231
$a+5h$	$\frac{5}{6}$	0·59016
$a+6h$	1	0·50000

வெடிலின் விதியானது

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = \frac{3}{10}h\left[\{f(a)+f(a+6h)\} + 5\{f(a+h) + f(a+5h)\} + \{f(a+h)+f(a+4h)\} + 6f(a+3h)\right]$$

இங்கு $a = 0,\ h = \frac{1}{6}$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{6}\left[\left\{f(0)+f(1)\right\} + 5\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right\} + \left\{f\left(\frac{2}{6}\right)+f\left(\frac{4}{6}\right)\right\} + 6f\left(\frac{3}{6}\right)\right]$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{6}\left[(1{\cdot}00000 + 0{\cdot}50000) + 5(0{\cdot}96216 + 0{\cdot}59016) + (0{\cdot}90000 + 0{\cdot}69231) + 6(0{\cdot}80000)\right]$$

$$= \underline{0{\cdot}5184637}$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து $\int_0^6 f(x)\,dx$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	0·146
1	0·161
2	0·176
3	0·190
4	0·204
5	0·217
6	0 230

சார்பின் 7 மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் வெடிலின் விதியை உபயோகிக்கலாம். $a = 0$, $x = 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது வெடிலின் விதியானது

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{10}[\{f(0)+f(6)\}+5\{f(1)+f(5)\}+\{f(2)+f(4)\}+6f(3)]$$

$$= \frac{3}{10}[0{\cdot}376 + 5\,(0{\cdot}378) + 0{\cdot}380 + 1{\cdot}140]$$

$$= \frac{3}{10}[3{\cdot}786]$$

$$= \underline{1{\cdot}1358}$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ என்னும் சார்பின் 9 மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, சிம்ஸனின் விதியை உபயோகித்து

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$ ன் மதிப்பினைக் காண்.

சிம்ஸனின் நீட்பு விதியை உபயோகித்து இத்தொகையைக் கணக்கிடலாம். முதலில் சார்பினை அட்டவணைப்படுத்தவும்.

x	$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$
0	1·0
1/8	8/9
2/8	4/5
3/8	8/11
4/8	2/3
5/8	8/13
6/8	4/7
7/8	8/15
1	1/2

சிம்ஸனின் நீட்பு விதியானது

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{8}\right)+2f\left(\frac{2}{8}\right)+4f\left(\frac{3}{8}\right)\right.$$

$$\left.+2f\left(\frac{4}{8}\right)+4f\left(\frac{5}{8}\right)+2f\left(\frac{6}{8}\right)+4f\left(\frac{7}{8}\right)+f(1)\right]$$

அட்டவணையிலிருந்து மதிப்புகளை இச்சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{24}\left[1\cdot0+4.\frac{8}{9}+2.\frac{4}{5}+4.\frac{8}{11}+2.\frac{2}{3}\right.$$

$$\left.+4.\frac{8}{13}+2.\frac{4}{7}+4.\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \underline{0\cdot6931545}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$f(x)$ இருபடிக் கோவையாக இருக்கும்பொழுது

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{12}\left[5f(0)+8f(1)-f(2)\right]$$ என நிரூபி.

$f(x) = f(0) + x\,\triangle f(0) + \dfrac{x(x-1)}{2}\triangle^2 f(0)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதனைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறைக்குள் தொகைப்படுத்தவும்.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[f(0)+x\triangle f(0)+\frac{x(x-1)}{2}\triangle^2 f(0)\right]dx$$

$$= \left. x f(0) + \frac{x^2}{2}\triangle f(0) + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\tfrac{1}{2}\triangle^2 f(0)\right]_0^1$$

$$= f(0) + \tfrac{1}{2}\triangle f(0) + \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2}\triangle^2 f(0)$$

வேறுபாடுகளுக்குப் பதிலாக, சார்பின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$= f(0) + \tfrac{1}{2}[f(1) - f(0)] - \frac{1}{12}[f(2) - 2f(1) + f(0)]$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{12}[5f(0) + 8f(1) - f(2)]$$

எடுத்துக்காட்டு 7:

$f(x)$ இருபடிச் சார்பாக இருக்கும்பொழுது

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{36}[5f(-1) + 39f(1) - 8f(2)]$$

என நிரூபி.

வலப் பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பின் மதிப்புகள் அசம இடைவெளியிலிருப்பதால், நியூட்டனின் வகுபட்ட வேறுபாட்டு இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை உபயோகித்துச் சார்பினை மதிப்பிட்டுத் தொகை காண்கின்றோம். எனவே சார்பு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப் பட்டிருக்கும்.

x	x	$f(x)$
a	-1	$f(-1)$
b	1	$f(1)$
c	2	$f(2)$

$f(x) = f(a) + (x-a)\,\Delta f(a) + (x-a)(x-b)\,\Delta^2 f(a)$ என்பது இருபடிச் சார்பாகும்.

இதில் $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 2$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore f(x) = f(-1) + (x+1)\,\Delta f(-1) + (x+1)(x-1)\,\Delta^2 f(-1).$$

வகுபட்ட வேறுபாடுகளை நீக்கவும்.

$$\Delta f(-1) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$\Delta^2 f(-1) = f(2) - f(1) + \frac{f(-1)}{2}$$

$$\therefore\ f(x) = f(-1) + (x+1)\frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$+ (x+1)(x-1)\left[f(2) - f(1) + \frac{f(-1)}{2}\right]\frac{1}{2}$$

இதனைத் தொகைப்படுத்தவும்.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[f(-1) + (x+1)\left\{\frac{f(1) - f(-1)}{2}\right\}\right.$$

$$\left. + (x+1)(x-1)\frac{1}{3}\left\{f(2) - f(1) + \frac{f(-1)}{2}\right\}\right]dx$$

$$= x f(-1) + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left\{\frac{f(1) - f(-1)}{2}\right\}$$

$$+ \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\frac{1}{3}\left\{f(2) - f(1) + \frac{f(-1)}{2}\right\}\Bigg]_0^1$$

$$= \frac{1}{36}\,[5 f(-1) + 39 f(1) - 8 f(2)]$$

எடுத்துக்காட்டு 8:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = a\,[f(2) + f(-2)] + b\,[f(3) + f(-3)]$$

ஆக இருந்தால் a, b ஆகியவைகள் மதிப்புகளைக் காண்க.

$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 (dx$$

$$= Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3} + \frac{Dx^4}{4}\Bigg]_{-3}^{3}$$

$$= 6A + 18C$$

ஆனால் $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = a\,[f(2)+f(-2)] + b\,[f(3)+f(-3)]$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad a\,[f(2)+f(-2)] + b\,[f(3)+f(-3)] = 6A + 18C$$

சார்பு $f(x) = A+Bx+Cx^2+Dx^3$ ஆக இருக்கும் பொழுது

$$f(2)+f(-2) = 2A+8C$$
$$f(3)+f(-3) = 2A+18C$$

$$\therefore \quad 6A+18C = a\,[f(2)+f(-2)] + b\,[f(b)+f(-b)]$$
$$= a\,[2A+8C] + b\,[2A+18C]$$
$$= A\,[2a+2b] + C\,[8a+18b]$$

A, C ஆகியவைகளின் குணகங்களைச் சமன்படுத்தவும்.

$$2a+2b = 6$$

$8a+18b = 18.$ இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து a, b யின் மதிப்புகளைக் காணவேண்டும்.

$$a = 3{\cdot}6, \; b = -0{\cdot}6.$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 3{\cdot}6\,[f(2)+f(-2)] - 0{\cdot}6\,[f(3)+f(-3)]$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில் இரண்டாம் வேறுபாட்டில் சிறிய பிழை உள்ளது எனக்காட்டு.

$$\int_{0}^{10} f(x)\,dx = 2{\cdot}5\,[f(1)+f(4)+f(6)+f(9)]$$

$f(x)$ இருபடிச் சார்பாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

தொகை வரையறையை (0 to 10) என்பதனை -5 யிலிருந்து 5 க்கு என மாற்றவும்.

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 2{\cdot}5\,[f(-4)+f(-1)+f(1)+f(4)]$$

$$= \int_{-5}^{5} (a + bx + cx^2)\,dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3}\Big]_{-5}^{5}$$

$$= 10a + \frac{250}{3}\,c$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தின் மதிப்பினைக் காண லாம்.

$$2{\cdot}5\,[f(-4)+f(-1)+f(1)+f(4)]$$
$$= 2{\cdot}5\,[4a+4c]$$

$$\because \left[\begin{array}{l} f(1)+f(-1) = 2a+2c \\ f(4)+f(-4) = 2a+32c \end{array}\right]$$

$$\therefore \int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 10a + \frac{250}{3}\,c$$

$$= 2{\cdot}5\,[f(-4)+f(-1)+f(1)+f(4)]$$

$$10a + 83\frac{1}{3}\,c = 10a + 85\,c$$

ஆனல் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட தொகையின் மதிப்பு $1\frac{2}{3}\,c$ குறைவாக உள்ளது. எனவே இரண்டாம் வேறுபாட்டுப் பிழை உள்ளது என்பது தெளிவாகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 10:

$f(x)$, 5 ம் படிச் சார்பாக இருந்து

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = p\,f(-\alpha) + q\,f(0) + p\,f(\alpha)$ ஆக இருந்தால் p, q, α ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

இச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து வேண்டிய மாற்றங்களைச் செய்து

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log_e 2 \text{ எனக் காட்டு.}$$

(A.U. M. Sc. 1965)

$f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$ எனக் கொள்வோம்.

இதனைத் தொகைப்படுத்தவும்.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5)\,dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \frac{ex^5}{5} + \frac{fx^6}{6}\Bigg]_{-1}^{+1}$$

$$= 2a + \frac{2}{3}c + \frac{2}{5}e \quad \ldots\ldots \quad \text{I}$$

$$= pf(-\alpha) + qf(0) + pf(-\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \text{II}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்பின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு, தொகையின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

$$\therefore \quad q\,f(0) = qa$$

$$f(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + f\alpha^5$$

$$f(-\alpha) = a - b\alpha + c\alpha^2 - d\alpha^3 + e\alpha^4 - f\alpha^5$$

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(a + c\alpha^2 + e\alpha^4).$$

$$\therefore \quad p[f(\alpha) + f(-\alpha)] = 2p(a + c\alpha^2 + e\alpha^4)$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\left(a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{5}e\right)$$

$$= pf(-\alpha) + qf(0) + pf(\alpha)$$

$$= qa + 2p(a + c\alpha^2 + e\alpha^4)$$

$$\therefore \quad 2\left(a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{5}e\right) = qa + 2p\,(a + c\alpha^2 + e\alpha^4)$$

$$a + \frac{1}{3}c + \frac{1}{5}e = a\left(\frac{q}{2} + p\right) + cp\,\alpha^2 + ep\alpha^4$$

a, c, e ஆகியவைகளின் குணகங்களைச் சமன்படுத்தவும்.

$$\frac{q}{2} + p = 1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

$$p\alpha^2 = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

$$p\alpha^4 = \frac{1}{5} \quad \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து p, q, α ஆகியவைகளின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\frac{\text{(iii)}}{\text{(ii)}} : \frac{p\,\alpha^4}{p\,\alpha^2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \alpha^2 = \frac{3}{5} = 0{\cdot}6$$

$$\alpha = \pm\sqrt{0{\cdot}6}$$

$$p\,\alpha^2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha^2 = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{3\,\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{3 \times \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\frac{q}{2} + p = 1$$

$$\therefore \quad q = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{5}{9}f(-\sqrt{0\cdot 6}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{0\cdot 6})\right]$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தில்

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = pf(-\alpha) + qf(0) + pf(\alpha)$$

ஆரம்பத்தை (origin) –1 க்கு மாற்றவும்.

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = pf(1-\alpha) + qf(1) + pf(1+\alpha)$$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ என வை. $\frac{y}{2} = x$ என எடுத்துக் கொள்.

$$\therefore \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x} = \int_{0}^{2} \frac{1}{1+\frac{y}{2}} \cdot \frac{dy}{2} = \int_{0}^{2} \frac{dy}{2+y}$$

$$= f(y)\,dy$$

ஆனல் $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = pf(1-\alpha) + qf(1) + pf(1+\alpha)$ என நிரூபித்துள்ளோம்.

$$f(y) = \frac{1}{2+y}$$

$$\therefore \int_{0}^{2} f(y)\,dy = \frac{p}{3+\alpha} + \frac{q}{3} + \frac{p}{3-\alpha}$$

p, q, α ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\int_{0}^{2} f(y)\,dy = \frac{\frac{5}{9}}{3+\sqrt{0\cdot 6}} + \frac{\frac{8}{9}}{3} + \frac{\frac{5}{9}}{3-\sqrt{0\cdot 6}}$$

$$= 0\cdot 6981$$

$$\therefore \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x} = \int_{0}^{2} \frac{dy}{2+y} = 0\cdot 6981$$

ஆனால் $\log_e{}^2 = 0{\cdot}6931$ ஆகும்.

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log_e{}^2$$

எடுத்துக்காட்டு 11:

$f(x)$ மூன்றும்படிக் கோவையாக இருந்து,

$$u_{-1} = \int_{-3t}^{-t} f(x)\,dx \text{ ஆகவும்}$$

$$u_0 = \int_{-t}^{t} f(x)\,dx \text{ ஆகவும்}$$

$$u_1 = \int_{t}^{3t} f(x)\,dx \text{ ஆகவும் இருந்தால்}$$

$$f(0) = \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{\triangle^2 u_{-1}}{24}\right] \text{ என நிரூபி.}$$

$f(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad u_{-1} = \int_{-3t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-3t}^{-t} (a+bx+cx^2+dx^3)\,dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\Big]_{-3t}^{-t}$$

$$= \left[-at + \frac{bt^2}{2} - \frac{ct^3}{3} + \frac{dt^4}{4}\right]$$

$$- \left[-3at + \frac{9}{2}bt^2 - \frac{27}{3}ct^3 + \frac{81}{4}dt^4\right]$$

$$u_{-1} = 2at - 4bt^2 + \frac{26}{3}ct^3 - 20\,dt^4$$

$$u_0 = \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-t}^{t} (a+bx+cx^2+dx^3)\,dx$$

$$= 2a + \frac{2}{3}ct^3$$

$$u_1 = \int_t^{3t} f(x)\,dx = \int_t^{3t} (a+bx+cx^2+d^3x)\,dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\Big]_t^{3t}$$

$$= 2at + 4bt^2 + \frac{26}{3}ct^3 + 20dt^4$$

$$\therefore \quad u_1 + u_{-1} = 4at + \frac{52}{3}ct^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{I}$$

$$u_0 = 2at + \frac{2}{3}ct^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{II}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து a, c ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காணவும்.

$$4at + \frac{52}{3}ct^3 = u_1 + u_{-1} \quad \ldots\ldots \quad \text{I}$$

$$2at + \frac{2}{3}ct^3 = u_0 \quad \ldots\ldots \quad \text{II}$$

$$(\text{II} \times 2) \quad 4at + \frac{4}{3}ct^3 = 2u_0 \quad \ldots\ldots \quad \text{III}$$

$$\text{I} - \text{III}: \; 16\,ct^3 = u_1 + u_{-1} - 2u_0$$

$$\therefore \quad c = \frac{1}{16t^3}[u_1 + u_{-1} - 2u_0]$$

c-ன் மதிப்பை (II) ல் பிரதியிட்டு a ன் மதிப்பைக் காணவும்.

$$u_0 = 2at + \frac{2}{3}ct^3$$

$$\therefore \quad a = \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{2}{3}ct^3\right]$$

$$= \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{2}{3}t^3(u_1 + u_{-1} - 2u_0)\frac{1}{16t^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{1}{24}(u_1 - 2u_0 + u_{-1})\right]$$

$$= \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{1}{24}\,\Delta^2 u_{-1}\right]$$

ஆனால் $f(x) = a - bx + cx^2 + dx^3$

$$\therefore \quad f(0) = a = \frac{1}{2t}\left[u_0 - \frac{1}{24}\,\Delta^2 u_{-1}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 12:

இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{5670}\,[5178\,f(0) + 308\,\{f(-1) + f(1)\} - 17\,\{f(-2) + f(2)\}]$$

என நிரூபி.

சார்பு கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டிருக்கும் பொழுது

x	x	$f(x)$
a	-2	$f(-2)$
b	-1	$f(-1)$
c	0	$f(0)$
d	1	$f(1)$
e	2	$f(2)$

இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)}$$

$$+ f(b)\frac{(x-a)(x-c)(x-d)(x-e)}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)}$$

$$+ f(c)\frac{(x-a)(x-b)(x-d)(x-e)}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)}$$

$$+ f(d)\frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-e)}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)}$$

$$+ f(e)\frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}$$

ஆகும்.

a, b, c, d, e ஆகியவைகளின் மதிப்புகளை, அட்டவணையில் காட்டியவாறு மதிப்பிட்டுச் சுருக்கவும்.

$$f(x) = \frac{f(-2)}{24}(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)$$

$$- \frac{f(-1)}{6}(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x) + \frac{f(0)}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$- \frac{f(1)}{6}(x^4 - x^3 - 4x^2 - 4x) + \frac{f(2)}{24}(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x)$$

இதனைத் தொகைப் படுத்தும் பொழுது ஒற்றைப்படை அடுக்குள்ள உறுப்புகள் அழிந்து படுவதால் அவைகளை நீக்கிவிடலாம்.

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Big[\frac{f(-2)}{24}(x^4 - x^2)$$

$$- \frac{f(-1)}{6}(x^4 - 4x^2) + \frac{f(0)}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$- \frac{f(1)}{6}(x^4 - 4x^2) + \frac{f(2)}{24}(x^4 - x^2)\Big]\,dx$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{f(-2)}{24}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{4}\right) - \frac{f(-1)}{6}\left(\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^3}{3}\right)$$

$$+\frac{f(0)}{4}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right)-\frac{f(1)}{6}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}\right)$$

$$+\frac{f(2)}{24}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=F(x)\Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)$-ன் மதிப்பைக் காணவும்.

$$\therefore \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{5760}\left[5178\,f(0)+308\{f(1)+f(-1)\}\right.$$
$$\left.-\{17\,f(2)+f(-2)\}\right]$$

எடுத்துக் காட்டு 13:

$f(x)$, நான்காம் படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்கும் பொழுது

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{1}{144}\left[95f(0)-50f(1)+600f(2)-350f(3)\right.$$
$$\left.+425f(4)\right]$$

என நிரூபி.

$$f(x)=f(0)+x\Delta f(0)+\frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0)+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0)$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^4 f(0)$$

என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$a=f(0)$$

இதில் $b=\Delta f(0)$ $\quad c=\Delta^2 f(0)$

$d=\Delta^3 f(0)$ $\quad e=\Delta^4 f(0)$

என வைக்கவும்.

$$\therefore\ f(x)=a+bx+\frac{c}{2!}x(x-1)+\frac{d}{3!}x(x-1)(x-2)$$
$$+\frac{e}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

இதனைத் தொகைப் படுத்தவும்.

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 \Big[\Big(a + bx + \frac{c}{2\,!}x(x-1)$$

$$+ \frac{d}{3\,!}x(x-1)(x-2) + \frac{e}{4\,!}x(x-1)(x-2)(x-3)\Big]\,dx$$

$$= 5a + \frac{25}{2}b + \frac{175}{12}c + \frac{225}{24}d + \frac{425}{144}e$$

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{144}[720a + 1800b + 2100c + 1350d + 425e]$$

$a, b, \ldots\ldots e$ ஆகியவைகளுக்குப் பழைய மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{144}[720\,f(0) + 1800\,\triangle f(0) + 2100\,\triangle^2 f(0)$$

$$+ 1350\,\triangle^3 f(0) + 425\,\triangle^4 f(0)]$$

வேறுபாடுகளை நீக்கிச் சார்பின் மதிப்புகளாக எழுதுதல் வேண்டும். கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் சார்புகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$
$720\,f(0)$	720				
$1800\,\triangle f(0)$	-1800	1800			
$2100\,\triangle^2 f(0)$	2100	-4200	2100		
$1350\,\triangle^3 f(0)$	-1350	4050	-4050	1350	
$425\,\triangle^4 f(0)$	425	-1700	2550	-1700	425
Total	95	-50	600	-350	425

$$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{1}{144}[95f(0) - 50f(1) + 600f(2) - 350f(3)$$

$$+ 425f(4)]$$

எடுத்துக்காட்டு 14:

மூன்றும் வேறுபாடுகள் சமமாக இருக்கும்பொழுது

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{24}\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + 23 f\left(\frac{1}{2}\right) + 23 f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right]$$

என நிரூபி. (ஏப்ரல் 1968)

மூன்றும் வேறுபாடுகள் சமமாக இருப்பதால் $f(x)$ ஐ மூன்றும்படிச் சார்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$f(x) = a + b\,x + cx^2 + dx^3$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தில் ஆரம்பத்தை 1 க்கு மாற்றவும்.

$$(11{\cdot}9)\quad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{24}\left[f\left(-\frac{3}{2}\right) + \left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right\} 23 + f\left(\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (a + b\,x + c\,x^2 + dx^3)\,dx$$

$$= ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1}$$

$$= 2a + \frac{2}{3}c$$

(11·9) ன் வலப்பக்கத்தின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$f(x) = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3$$

$$\therefore f(\tfrac{1}{2}) = a + \tfrac{1}{2}b + (\tfrac{1}{2})^2 c + (\tfrac{1}{2})^3 d$$

$$f(-\tfrac{1}{2}) = a - \tfrac{1}{2}b + (\tfrac{1}{2})^2 c - (\tfrac{1}{2})^3 d$$

$$f(\tfrac{1}{2}) + f(-\tfrac{1}{2}) = 2a + \tfrac{2}{4}c$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = a + \frac{3}{2} b + \left(\frac{3}{2}\right)^2 c + \left(\frac{3}{2}\right)^3 d$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = a - \frac{3}{2} b + \left(\frac{3}{2}\right)^2 c - \left(\frac{3}{2}\right)^3 d$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2a + \frac{9}{2} c$$

இம்மதிப்புகளை (11·9) ல் வலப்புறத்தில் பிரதியிடவும்.

$$\frac{1}{24}\left[f\left(-\frac{3}{2}\right) + 23\left\{ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} + f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[2a + \frac{9}{2} c + 2a + \frac{1}{2} c\right]$$

$$= 2a + \frac{2}{3} c \qquad \text{(இடப்புற மதிப்புக்குச் சமம்).}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{24}\left[f\left(-\frac{3}{2}\right) + 23 f\left(-\frac{1}{2}\right) + 23 f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$= 2a + \frac{2}{3} c$$

பழைய ஆரம்பத்திற்கு மீண்டும் மாறவும்.

$$\therefore \int_{0}^{2} f(x)\, dx = \frac{1}{24}\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + 23 f\left(\frac{1}{2}\right) + 23 f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$f(x)$ என்னும் சார்பின் 4 ஆம் வேறுபாடுகள் பூச்சியமாக இருக்கும்பொழுது

$$(11{\cdot}10)\quad \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

என நிரூபி.

$f(x) = a+bx+cx^2+fx^3$ என எடுத்துக் கொள்வோம். நான்காம் வேறுபாடுகள் பூச்சியமாயிருப்பதால், மூன்றாம் படிச் சார்பாக எடுத்துள்ளோம்.

அப்பொழுது இடப்பக்க மதிப்பானது

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x} (a+bx+cx^2+fx^3)\, dx$$

$$= \int_0^\infty ae^{-x}\, dx + b\int_0^\infty e^{-x} x\, dx$$

$$+ c\int_0^\infty e^{-x} x^2\, dx + f\int_0^\infty e^{-x} x^3\, dx$$

$$= a+b+2c+6f$$

வலப்பக்க மதிப்பினைக் காண்போம்.

$$f(x) = a+bx+cx^2+fx^3$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\Big[a+(2-\sqrt{2})\,b + (2-\sqrt{2})^2 c$$

$$+ (2-\sqrt{2})^3 f\Big]$$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\Big[a+(2+\sqrt{2})\,b + (2+\sqrt{2})^2 c$$

$$+ (2+\sqrt{2})^3 f\Big]$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்ட

$$\left[\frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})\right] = a+b+2c+6f$$

எனவே இடப்புறத்தின் மதிப்பு வலப்புற மதிப்புக்குச் சமம்.

$$\therefore\ \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

எடுத்துக்காட்டு 16:

மூன்று முறை சிம்ஸனின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ ன் தோராய மதிப்பினைக் காண்க. (ஏப்ரல் 1968)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^{2/6} e^{-x^2}\,dx + \int_{2/6}^{4/6} e^{-x^2}\,dx + \int_{4/6}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

சிம்ஸனின் நீட்பு விதியானது

$$\int_0^{2n} f(x)\,dx = h \,.\, \frac{1}{3}\,[f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+ \ldots\ldots f(2n)].$$

சார்பினை அட்டவணைப்படுத்தவும்.

x	$f(x) = e^{-x^2}$
0	1·0000
$\frac{1}{6}$	0·9705
$\frac{2}{6}$	0·8958
$\frac{3}{6}$	0·7788
$\frac{4}{6}$	0·6440
$\frac{5}{6}$	0·5019
1	0·3679

சிம்ஸனின் சூத்திரத்தில் $h = \dfrac{1}{6}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,.\,h\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 2f\left(\frac{2}{6}\right) + 4f\left(\frac{3}{6}\right) + 2f\left(\frac{4}{6}\right) + 4f\left(\frac{5}{6}\right) + f(1)\right]$$

அட்டவணையிலிருந்து மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்கவும்.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \underline{0{\cdot}74735}$$

ஹார்டியின் சூத்திரம் :

$f(x)$, 5 ம் படிச் சார்பாக இருக்கும் பொழுது தொகைச் சூத்திரமாவது

$$(11{\cdot}11)\quad \int_a^{a+6h} f(x)\,dx = 0{\cdot}28\,[f(a)+f(a+6h)] + 1{\cdot}62\,[f(a+h)+f(a+5h)] + 2{\cdot}2\,f(a+3h)$$ (அல்லது) $[a = 0,\ h = 1]$

$$(11{\cdot}12)\quad \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0{\cdot}28\,[f(-3)+f(3)] + 1{\cdot}62\,[f(2)+f(-2)] + 2{\cdot}2\,f(0)$$

நிரூபணம் : $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$ என எடுத்துக் கொள்வோம். இதனைத் தொகைப் படுத்தவும்.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5)\,dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \frac{ex^5}{5} + \frac{fx^6}{6}\Bigg]_{-3}^{3}$$

$$(11{\cdot}13)\qquad = 2a + 18c + \frac{486}{5}\,e$$

(11·12) ல் வலப்புற மதிப்பினைக் காண்க.

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

$$\therefore\ f(2) + f(-2) = 2a + 8c + 32e$$

$$f(3) + f(-3) = 2a + 18c + 162e$$

$$f(0) = a$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்து a, b, c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளை (11·13) ல் பிரதியிடவும். அதன் மதிப்பாவது:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0{\cdot}28\,[f(3)+f(-3)] + 1{\cdot}62\,[f(2)+f(-2)] + 2{\cdot}2\,f(0)$$

ஆரம்பத்தை -3 க்கு மாற்றவும்.

$$\int_{0}^{6} f(x)\,dx = 0{\cdot}28\,[f(0)+f(6)] + 1{\cdot}62\,[f(1)+f(5)] + 2{\cdot}2\,f(3)$$

இதனை ஹார்டியின் தொகைச் சூத்திரம் என அழைக்கின்றோம். ஆரம்பம் a ஆக இருந்து, இடைவெளி h ஆக இருந்தால் ஹார்டியின் சூத்திரமானது,

$$\int_{a}^{a+6h} f(x)\,dx = h\,[0{\cdot}28\,\{f(a)+f(a+6h)\} + 1{\cdot}62\,\{f(a)+f(a+5h)\} + 2{\cdot}2\,f(a+3h)]$$

இதனை முடிவிலா எல்லைக்கு நீட்டினால்

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+6h} f(x)\,dx + \int_{a+6h}^{a+12h} f(x)\,dx + \int_{a+12h}^{a+18h} f(x)\,dx + \ldots\ldots$$

$$(11{\cdot}14)\quad \therefore \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = h\,\{0{\cdot}28\,[f(a)+2f(a+6h) + 2f(a+12h)+\ldots\ldots] + 1{\cdot}62\,[f(a+h)+f(a+5h)+f(a+7h)+\ldots\ldots] + 2{\cdot}2\,[f(a+3h)+f(a+9h)+\ldots\ldots]\}$$

இதனை ஹார்டியின் பொதுத் தொகைச் சூத்திரம் என அழைக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$y = x\sqrt{x+1}$ என்னும் வரை கோட்டிற்கும் x-அச்சுக்கு மிடையே, $x = 0$-க்கும் $x = 2$-க்கு மிடையே உள்ள பரப் பளவைக் கண்டுபிடி.

ஹார்டியின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து இந்தப் பரப் பளவைக் காணலாம். இப்பரப்பளவானது $\int_0^2 x\sqrt{x+1}\,dx$ க்குச் சமமாகும்.

ஹார்டியின் சூத்திரமாவது

$$\int_a^{a+6h} f(x)\,dx = h\,[\,0{\cdot}28\,\{f(a) + f(a+6h)\}$$
$$+\,1{\cdot}62\,\{f(a+h) + f(a+5h)\} + 2{\cdot}2f\,(a+3h)\,]$$

இங்கு $f(x) = x\sqrt{x+1}$, $a = 0$, $h = \frac{1}{3}$ எனக்கொண்டு சார்பினை அட்டவணைப் படுத்தவும்.

x	x	$f(x) = x\sqrt{x+1}$
a	0	0
$a+h$	$\frac{1}{3}$	0·3849
$a+2h$	$\frac{2}{3}$	0·8628
$a+3h$	1	1·4142
$a+4h$	$\frac{4}{3}$	2·0360
$a+5h$	$\frac{5}{3}$	2·7200
$a+6h$	2	3·4642

இம் மதிப்புகளை மேலே உள்ள சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{1}{3}\,[\,0{\cdot}28\,(0+3{\cdot}4642)$$

$$+1{\cdot}62(0{\cdot}3849+2{\cdot}7200)+2{\cdot}2\,(1{\cdot}4142)\,]$$

பரப்பளவு = $\underline{3{\cdot}0370513}$ சதுர அலகுகள்.

யூலர்–மக்லாரின் சூத்திரம் : (Euler-Maclaurin's Formula)

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots$$

$$+f(a+\overline{r-1}\,h)+\frac{1}{2}f(a+rh)\Big]-\frac{h}{12}\Big[f'(a+rh-f'(a)\Big]$$

$$+\frac{h^3}{720}\,[f'''(a+rh)-f'''(a)\,]-\frac{h^5}{30240}\,[f^{v}(a+rh)-f^{v}(a)]+\ldots$$

(11·3)–வது சமன்பாட்டில் C–ன் மதிப்பைக் கண்டு பிடித்தால் இச் சூத்திரத்தை நிறுவலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{r-1}\,h)$$

$$+\frac{1}{2}f(a+rh)+C.$$

$f(x) = e^{vx}$ என எடுத்துக் கொண்டு C-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிடவும்.

$$(11{\cdot}15)\quad \frac{1}{h}\int_a^{a+rh} e^{vx}\,.\,dx = \frac{1}{2}\,e^{va}+e^{v(a+h)}+\ldots\ldots$$

$$e^{v(a+\overline{r-1}\,h)}+e^{v(a+rh)}+C$$

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} e^{vx}\,dx = \frac{1}{h}\cdot\frac{e^{vx}}{v}\Big]_a^{a+rh}$$

$$=\frac{1}{vh}\cdot\Big[e^{v(a+rh)}-e^{va}\Big]$$

$$=\frac{1}{vh}\Big[e^{va}\,(e^{vrh}-1)\Big]$$

(11·15)—வது சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் $\frac{1}{2}e^{va}$ ஐக் கூட்டிக் கழிக்கவும்.

$$\therefore \quad \frac{e^{va}(e^{vrh}-1)}{vh} = e^{va} + e^{v(a+h)} + \ldots\ldots + e^{v(a+\overline{r-1}\,h)}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{va}(e^{vrh}-1) + C$$

$$= e^{va}\left(1 + e^{vh} + e^{2vh} + \ldots\ldots e^{v\overline{r-1}\,h}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{va}(e^{vrh}-1) + C$$

$$= e^{va}\frac{(e^{vrh}-1)}{e^{vh}-1} + \frac{1}{2}e^{va}(e^{vrh}-1) + C$$

இரு புறத்தையும் $e^{va}(e^{vrh}-1)$ ஆல் வகுக்கவும்.

$$(11{\cdot}16) \quad \frac{1}{vh} = \frac{1}{e^{vh}-1} + \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{va}(e^{vrh}-1)}$$

ஆனால் $\frac{1}{e^{vh}-1} = \frac{1}{vh} - \frac{1}{2} + \frac{vh}{12} - \frac{(vh)^3}{720} + \frac{(vh)^5}{30240} - \ldots\ldots$

இதனை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{vh} = \frac{1}{vh} - \frac{1}{2} + \frac{vh}{12} - \frac{(vh)^3}{720} + \frac{(vh)^5}{30240} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{va}(e^{vrh}-1)}$$

$$\therefore \quad C = e^{va}(e^{vrh}-1)\left[-\frac{vh}{12} + \frac{(vh)^3}{720} - \frac{(vh)^5}{30240} + \ldots\ldots\right]$$

C-ன் மதிப்பை வகை வேறுபாட்டுக் குணகங்களாக எழுதலாம்.

$$f(x) = e^{vx}$$

$$f'(x) = ve^{vh}$$

$$\therefore \quad f'(x)\Big]_a^{a+rh} = v\left[e^{va}(e^{vrh} - 1)\right]$$

$$f'''(x)\Big]_a^{a+rh} = v^3\left[e^{va}(e^{vrh} - 1)\right]$$

$$f^{v}(x)\Big]_a^{a+rh} = v^5 e^{va}(e^{vrh} - 1)$$

∴ இச் சமன்பாடுகளின் வலப்பக்க மதிப்புகளுக்கு C யில் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad C = -\frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)] + \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''](a) - \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

எனவே (11·13) ஆவது சமன்பாட்டில் C க்கு இந்த மதிப்பைப் பிரதியிட யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரம் கிடைக்கின்றது.

$$(11{\cdot}17) \quad \frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{r-1h}) + \frac{1}{2}f(a+rh) - \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)] + \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''(a)] - \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

இதனை யூலர்-மக்லாரின் எண்ணியல் தொகைச் சூத்திரம் என்று அழைக்கிறோம்.

இதனை உபயோகித்துச் சார்பினைத் தொகைப்படுத்தும் முறையினையும், தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காணும் முறையினையும் இனி பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 18:

யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ன்

மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரமாவது

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] + \ldots\ldots$$

இங்கு $a=0$, $a+rh=1$ $h=\frac{1}{6}$, $r=6$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore\ f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$\therefore \quad [f'(a+rh) - f'(a)] = [f'(1) - f'(0)] = -\tfrac{1}{2}$$
$$[f'''(a+rh) - f'''(a)] = [f'''(1) - f'''(0)] = 0$$

தொகைச் சூத்திரத்தில், முதல் அடைப்புக்குள்ள, சார்பின் மதிப்புகளைக்காண, அட்டவணைப் படுத்துகின்றோம்.

x	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
0	1·0000000
$\frac{1}{6}$	0·9729729
$\frac{2}{6}$	0·9000000
$\frac{3}{6}$	0·8000000
$\frac{4}{6}$	0·6923077
$\frac{5}{6}$	0·5901639
1	0·5000000

இம்மதிப்புகளை யூலர்–மக்லாரின் சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l} 0{\cdot}5000000 \\ 0\ 9729729 \\ 0{\cdot}9000000 \\ 0{\cdot}8000000 \\ 0{\cdot}6923077 \\ 0{\cdot}5901639 \\ \underline{0{\cdot}5000000} \end{array}\right] - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{720}\left(\frac{1}{6}\right)^4 0$$

$$= \underline{0{\cdot}78539817}$$

எடுத்துக்காட்டு 19:

ஆறு தசம இடங்களுக்குச் சரியாக இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\sum_{n=50}^{150} \frac{1}{(4n+3)^2}$$ (ஏப்ரல் 1967)

இதனைக் கீழ்கண்டவாறு விரித்து எழுதலாம்:

$$\sum_{50}^{150} \frac{1}{(4n+3)^2} = \frac{1}{203^2} + \frac{1}{207^2} + \frac{1}{211^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{603^2}$$

ஆூலர் மக்லாரின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து இத்தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2} f(a+rh)\right]$$

$$-\frac{h}{12}\,[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+\frac{h^3}{720}\,[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$-\frac{h^5}{30240}\,[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)]$$

இச்சூத்திரத்தில் $a = 203, \quad h = 4, \quad r = 100$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$\therefore [f'(a+rh) - f'(a)] = [f'(603) - f'(203)] = \frac{2}{203^3} - \frac{2}{603^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

$$\therefore [f'''(a+rh) - f'''(a)] = [f'''(603) - f'''(203)] = \frac{24}{203^5} - \frac{24}{603^5}$$

$$\frac{1}{4}\int_{203}^{603} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{203^2} + \frac{1}{207^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{599^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{603^2}\right]$$

$$- \frac{2}{3}\left(\frac{1}{203^3} - \frac{1}{603^3}\right) + \frac{4^3}{720}\left(\frac{24}{203^5} - \frac{24}{603^5}\right)\ldots\ldots$$

$$\therefore \left[\frac{1}{203^2} + \frac{1}{207^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{599^2} + \frac{1}{603^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int_{203}^{603} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{203^2} + \frac{1}{603^2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{203^3} - \frac{1}{603^3}\right)$$

$$- \frac{4^3}{720}\left(\frac{24}{203^5} - \frac{24}{603^5}\right) + \ldots\ldots$$

வலப்பக்கத்திலுள்ள மதிப்புகளைச் சுருக்கவும்.

$$\sum_{50}^{150} \frac{1}{(4n+3)^2} = \frac{1}{203^2} + \frac{1}{207^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{603^2} = \underline{0{\cdot}00083129285}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

$$\frac{1}{101^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{105^2} + \frac{1}{107^2} + \ldots\ldots \infty .$$

யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720} [f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240} [f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

இச் சூத்திரத்தில் $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $h = 2$ $r = \infty$ என எடுத்துக் கொள்ளவும்.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$\therefore [f'(a+rh) - f'(a)] = \frac{2}{a^3} = [f'(\infty) - f'(a)]$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

$$\therefore [f'''(a+rh) - f'''(a)] = f'''(\infty) - f'''(a) = \frac{24}{a^5}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+4)^2} + \ldots\ldots \infty \right]$$

$$- \frac{2}{12}\left(\frac{2}{a^3}\right) + \frac{2^3}{720}\left(\frac{24}{a^5}\right) - \ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(a+4)^2} + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2a^2}$$

$$+ \frac{2}{12}\left(\frac{2}{a^3}\right)$$

$$- \frac{2^3}{720}\left(\frac{24}{a^5}\right) \ldots\ldots$$

இதில் $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_a^\infty = \frac{1}{a}$ ஆகும்.

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் $a = 101$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\frac{1}{101^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{105^2} + \ldots\ldots = \frac{1}{2\times 101} + \frac{1}{2\,(101)^2} + \frac{1}{3\times(101)^3} - \frac{4\,.\,1}{15\,(101)^5}\ldots\ldots$$

$$= \underline{0{\cdot}004999833}$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முடிவிலாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{14^3} + \ldots\ldots\ \infty.$$

ஆய்லர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து இத்தொகையைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f\,(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2} f\,(a+rh)$$

$$- \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)]\ldots\ldots$$

இதில் $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $r=\infty$, $h=1$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{12}\left(\frac{3}{a^4}\right) + \frac{1}{720}\left(\frac{60}{a^6}\right) - \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \ldots\ldots \infty$$

$$= \int_a^\infty \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^4} - \frac{1}{12a^6} + \ldots\ldots$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\int_a^\infty = \frac{1}{2a^3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \ldots\ldots = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^4} - \frac{1}{12a^6} + \ldots\ldots$$

இதில் $a = 11$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \ldots\ldots \infty = \frac{1}{2\,(11)^2} + \frac{1}{2\,(11)^3} + \frac{1}{4\,(11)^4} - \frac{1}{12\,(11)^6} + \ldots\ldots$$

$$= 0{\cdot}004132231$$
$$0{\cdot}000375657$$
$$0{\cdot}000017075 - 0{\cdot}000000046$$

$$\frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \frac{1}{13^3} + \ldots\ldots \infty = 0{\cdot}004524917$$

யூலர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து முதல் r இயற்கை எண்களின் (Natural Numbers) n ஆவது படிக் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடலாம். அதாவது $(1^n + 2^n + 3^n + \ldots\ldots r^n)$ ன் தொகையைப் பெறலாம்.

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots\ldots \frac{1}{2}f(a+rh)\Big]$$

$$- \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

இதில் $f(x) = x^n$, $a=0$, $h=1$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^r x^n\,dx = \left(1^n+2^n+3^n+ \ldots\ldots (r-1)^n + \frac{1}{2} r^n\right) - \frac{1}{12}nr^{n-1}$$

$$+ \frac{1}{720}n(n-1)(n-2)r^{n-3}$$

$$- \frac{1}{30240}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)r^{n-4} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad 1^n+2^n+3^n+ \ldots\ldots r^n = \int_0^n x^n\,dx + \frac{1}{2}r^n + \frac{1}{12}nr^{n-1}$$

$$- \frac{1}{720}n(n-1)(n-2)r^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{30240}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)r^{n-4} \ldots\ldots$$

$$\int_0^r x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^r = \frac{r^{n+1}}{n+1}$$

$$(11{\cdot}18) \quad \therefore \quad 1^n+2^n+3^n+ \ldots\ldots r^n = \frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}r^n + \frac{1}{12}nr^{n-1}$$

$$- \frac{1}{720}n(n-1)(n-2)r^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{30240}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)r^{n-5} \ldots\ldots$$

இதனை உபயோகித்து முதல் r எண்களின் n ஆவதுபடிக் கூட்டுத் தொகையைக் கணக்கிடும் முறையைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 22 :

முதல் r எண்களின் 7 ஆவது கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$1^7+2^7+3^7+ \ldots\ldots + r^7$$

(11·18) ஆவது சூத்திரத்தில் $n=7$ என பிரதியிடவும்.

$$1^n+2^n+3^n+4^n + \ldots\ldots + r^n = \frac{r^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} r^n + \frac{1}{12} nr^{n-1}$$

$$- \frac{1}{720} n (n-1) (n-2) r^{n-3}$$

$$+ \frac{1}{30240} n (n-1) (n-2) (n-3) (n-4) r^{n-5} - \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad 1^7+2^7+3^7+ \ldots\ldots + r^7 = \frac{r^8}{8} + \frac{1}{2} r^7 + \frac{7}{12} r^6 - \frac{7}{24} r^4 + \frac{1}{12} r^2$$

r க்கும் மதிப்பு கொடுத்து கூட்டுத் தொகையைக் காணலாம்.

வேலிஸ் தேற்றம் : (Wallis' Theorem)

$r\,!$ ன் தோராய மதிப்பைக் காண ஸ்டெர்லிங் ஒரு சூத்திரத்தை அமைத்துள்ளார். அச் சூத்திரத்தில் வேலிஸ் தேற்றம் பயன்படுத்தப் படுகின்றது. அத் தேற்றமாவது

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lt}_{r \to \infty} \frac{2^{4r} (r\,!)^4}{(2r\,!)^2 (2r+1)}$$

இத் தேற்றத்தை இப்பொழுது நிறுவுவோமாக.

$I_r = \int_0^{\pi/2} \sin^r x \, dx$ என வைக்கவும். பகுதிப் படுத்தித் தொகை காணவும். அப்பொழுது [$\int u dv = uv - \int v du$]

$u = \sin^{r-1} x$

$dv = \sin x \, dx$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore \quad v = -\cos x$

$$\therefore \quad I_r = -\sin^{r-1} x \cos x \Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (r-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{r-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= 0 + (r-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{r-2} x \cos^2 x \, dx$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad I_r = (r-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{r-2} x \,(1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= (r-1)\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{r-2} x \, dx - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^r x \, dx\right]$$

$$= (r-1)\left[I_{r-2} - I_r\right]$$

$$\therefore \quad I_r = \frac{r-1}{r} I_{r-2}$$

இதே முறையில் அடுத்தடுத்துத் தொகைப் படுத்தவும்.

$$(11{\cdot}19) \quad I_r = \frac{r-1}{r}\,\frac{r-3}{r-2}\, I_{r-4}$$

$$= \frac{r-1}{r}\cdot\frac{r-3}{r-2}\cdot\frac{r-5}{r-4}\, I_{r-6}$$

1. r இரட்டைப்படை யெண்ணுக இருக்கும் பொழுது

$$I_4 = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

2. r ஒற்றைப்படை யெண்ணுக இருக்கும்பொழுது

$$I_3 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \, dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 1$$

$x \leq \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும் பொழுது $\sin x \leq 1$ ஆக உள்ளது.

அதனல் $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும் பொழுது

$\sin^{2r-1} x \geq \sin^{2r} x \geq \sin^{2r+1} x$ ஆகவும்,

$I_{2r-1} \geq I_{2r} \geq I_{2r+1}$ ஆகவும் உள்ளன.

(11·19)-ல் $r = 2r$ என வைக்கவும்.

$I_{2r+1} = \frac{2r}{2r+1} I_{2r-1}$. $(r \to \infty)$ r முடிவிலாத் தொகையை நெருங்கும் பொழுது

$I_{2r-1} = I_{2r} = I_{2r+1}$ என இருக்கும்.

$I_{2r} = I_{2r+1}$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots 3 . 1 . \pi}{(2r)(2r-2)\ldots\ldots 4 . 2} = \frac{(2r)(2r-2)\ldots\ldots 4 . 2}{(2r+1)(2r-1)\ldots 5 . 3 . 1}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{(2n)^2 (2r-2)^2 \ldots 4^2 . 2^2}{(2r+1)(2r-1)^2 (2r-3)^2 \ldots 3^2 . 1^2}$$

$$(11·20) \quad \frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{2^{4r} (r\,!)^4}{(2r\,!)^2 (2r+1)}$$

ஸ்டெர்லிங்கின் காரணீயப் பெருக்கத்தின் தோராயம்:

காரணீயப் பெருக்கத்தின் $(r!)$ மதிப்பைக்காண உதவும் ஸ்டெர்லிங்கின் தோராய சூத்திரத்தினைக் காண்போம். இதனை நிறுவ, யூலர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தில் $f(x) = \log_e x$ எனப் பிரதியிடவும். ஸ்டெர்லிங்கின் தோராய மதிப்பானது

$$r\,! = r^{r+1/2} \sqrt{2\pi}\; e^{-r} \left(1 + \frac{1}{12r} + \ldots\ldots\right)$$

யூலர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரமாவது:

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+\overline{r-1}\,h} f(x)\, dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots\right.$$

$$+ \frac{1}{2} f(a + \overline{r-1}\, h) \Big] - \frac{h}{12}\Big[f'(a+\overline{r-1}\, h) - f'(a) \Big]$$

$$+ \frac{h^3}{720}[f'''(a + \overline{r-1}\, h) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}[f^{v}(a + \overline{r-1}\, h) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

இதில் $f(x) = \log_e x$, $a = 1$, $h = 1$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_1^r \log_e x\, dx = \left(\frac{1}{2}\log_e 1 + \log_e 2 + \ldots\ldots + \log(r-1) + \frac{1}{2}\log r\right)$$

$$- \frac{1}{12}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{1}\right] + \frac{1}{720}\left[\frac{2}{r^3} - \frac{2}{1^3}\right] \ldots\ldots$$

$$x \log x - x \Big]_1^r = \log_e 1 + \log_e 2 + \ldots\ldots + \log(r-1)$$

$$+ \frac{1}{2}\log r - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{r} - 1\right) + \frac{1}{360}\left(\frac{1}{r^3} - 1\right) \ldots\ldots$$

$$r \log r - r = \log_e r! - \frac{1}{2}\log_e r - \frac{1}{12r} + \frac{1}{360 r^3} + C$$

இங்கு C என்பது r இல்லாத தனித்து இருக்கும் எண்.

$$(11{\cdot}21) \quad \therefore \quad \log_e r! = \left(r + \frac{1}{2}\right)\log r - r$$

$$+ \frac{1}{12r} - \frac{1}{360 r^3} + C$$

வேலிஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி C–ன் மதிப்பினைக் காணவேண்டும்.

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lt}_{r\to\infty} \frac{2^{4r}(r!)^4}{(2r!)^2(2r+1)}$$

இருபக்கமும் மடக்கை எடுக்கவும்.

$$\log\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lt}_{r\to\infty} [\, 4r\log 2 + 4\log(r!) - 2\log(2r!) - \log(2r+1)\,]$$

இச் சமன்பாட்டில் $\log r!$, $\log (2r!)$ ஆகியவைகளுக்கு (10·21) ஆவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்திப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \log \frac{\pi}{2} = \underset{r \to \infty}{\text{Lt}} \left[4r \log 2 + 4 \left\{ \left(r + \frac{1}{2} \right) \log r - r + C \right\} \right.$$

$$\left. - 2 \left\{ \left(2r + \frac{1}{2} \right) \log 2r - 2r + C \right\} - \log (2r+1) \right]$$

$$= \underset{r \to \infty}{\text{Lt}} [4r \log 2 + 4r \log r - 4r + 4C - 4r \log 2r$$

$$+ 4r - 2C - \log (2r+1)]$$

இதில் $4r \log 2r = 4r \log 2 + 4r \log r$

$\log 2r = \log 2 + \log r$ எனப் பிரதியிடலாம்.

r-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாக இருப்பதால் $\log (2r+1) = \log 2r$ என வைத்துக் கொள்ளலாம். இம் மதிப்பினை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுச் சுருக்க

$\log \frac{\pi}{2} = 2C - 2 \log 2$ என ஆகின்றது.

$$\therefore \quad C = \frac{1}{2} \log 2\pi$$

C ன் இந்த மதிப்பை (11·21) ல் பிரதியிடவும்.

$$\log_e r! = \left(r + \frac{1}{2} \right) \log_e r - r + \frac{1}{2} \log 2\pi$$

$$+ \frac{1}{12r} - \frac{1}{360r^3} + \ldots\ldots$$

$$(11{\cdot}22) \quad \therefore \quad r! = r^{r+1/2} e^{-r} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12r} \ldots\ldots \right)$$

இதனை உபயோகித்துப் பெரிய எண்களின் காரணியப் பெருக்கத்தின் தோராய மதிப்பினைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 23 :

1000 ! ன் தோராய மதிப்பினைக் கணக்கிடு. (ஏப்ரல் 1968)

முதலில் log 1000 ! ன் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டு, பிறகு அதிலிருந்து 1000 ! ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

ஸ்டெர்லிங்கின் காரணீயப் பெருக்கத்தின் சூத்திரமாவது

$$\log_{10} r! = \left(r + \frac{1}{2}\right) \log_{10} r + \frac{1}{2} \log_{10} (2\pi)$$

$$- r \log_{10} e + \frac{1}{12r} \log_{10} e - \frac{1}{360r^3} \log_{10} e + \ldots\ldots$$

இங்கு $\frac{1}{2} \log 2\pi = 0{\cdot}039909$

$$\log_{10} e = 0{\cdot}43429$$

மேலே உள்ள சூத்திரத்தில் $r = 1000$ என மதிப்பிடவும்.

$$\therefore \quad \log_{10} 1000! = (1000{\cdot}5) \log_{10} 1000 + \frac{1}{2} \log_{10} 2\pi$$

$$- 1000 \log_{10} e + \frac{1}{12 \times 1000} \log_{10} e$$

$$- \frac{1}{360 \times 1000^3} \log_{10} e - \ldots\ldots$$

$$= (1000{\cdot}5) \times 3 + 0{\cdot}39909 - 434{\cdot}29$$

$$+ 0{\cdot}00003619$$

$$= 2567{\cdot}60909$$

$$\therefore \quad 1000! = \text{antilog } (2567{\cdot}60909)$$

இந்த எண்ணில் 2568 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 24:

69 ! ன் தோராய மதிப்பினைக் காண்க. (ஏப்ரல் 1969)

முதலில் log 69 ! ன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு, அதிலிருந்து 69!'ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

$$\log r! = \log (r-1)! + \log r.$$

$$\log_{10} (r-1)! = \log r! - \log r.$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\right)_{10} \log r - \frac{1}{2} \log_{10} 2\pi - r \log_{10} e$$

$$+ \frac{1}{12r} . \log_{10} e - \frac{1}{360\, r^3} \log_{10} e + \ldots\ldots$$

$r = 70$ என மதிப்பிடவும்.

$$\log 69! = 69{\cdot}5 \log_{10} 70 + \frac{1}{2} \log_{10} 2\pi - 70 \log_{10} e$$

$$+ \frac{1}{12(70)} \log_{10} e - \frac{1}{360(70)^3} \log_{10} e + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} \log_{10} 2\pi = 0{\cdot}39909$$

$$\log_{10} e = 0{\cdot}43429.$$

$$\therefore \quad \log_{10} 69! = 128{\cdot}23445$$

$$69! = \text{antilog}\,(128{\cdot}23445)$$

இந்த எண்ணில் 129 இலக்கங்கள் இருக்கும்.

கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரம் : (Gregory's formula)

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots$$

$$+ f(a+\overline{r-1}\,h) + \frac{1}{2} f(a+rh)\Big]$$

$$- \frac{1}{12} \,[\triangle f(a+\overline{r-1}\,h) - \triangle f(a)]$$

$$- \frac{1}{24} \,[\triangle^2 f(a+\overline{r-2}\,h) + \triangle^2 f(a)]$$

$$- \frac{19}{720} \,[\triangle^3 f(a+\overline{r-3}\,h) - \triangle^3 f(a)]$$

$$- \frac{3}{160} \,[\triangle^4 f(a+\overline{r-4}\,h) + \triangle^4 f(a)]$$

$$- \frac{683}{60480} \,[\triangle^5 f(a+\overline{r-5}\,h) - \triangle^5 f(a)] + \ldots\ldots$$

நிரூபணம் : ஆய்லர்-மக்லாரின் சூத்திரத்தில் சார்பின் வகைவேறுபாட்டுக் குணகங்களை உபயோகித்து, அதன் தொகையினைப் பெறுகின்றோம். இச்சூத்திரத்தில் வகைவேறுபாட்டுக் குணகங்களினிடத்தில் எண்ணியல் வகைவேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களைப் பிரதியிட்டால் கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரம் கிடைக்கின்றது.

யூலர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரமாவது :

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{r-1}\,h) + \frac{1}{2} f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{h}{12}\,[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}\,[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}\,[f^{v}(a+rh) - f^{v}(a)] \ldots\ldots$$

சார்பின் அமைப்பு தெரியாமலிருந்தும் அதன் மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப் பட்டிருக்கும் பொழுது

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
⋮	
$a+\overline{r-1}h$	$f(a+\overline{r-1}h)$
$a+rh$	$f(a+rh)$

எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களாவன:

$$h\,.\,f'(a) = \Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(a) + \ldots\ldots$$

$$h\,.\,f'(a+rh) = \Delta f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(a+\overline{r-2}\,h)$$

$$+ \frac{1}{3}\Delta^3 f(a+\overline{r-3}\,h) + \frac{1}{4}\Delta^4 f(a+\overline{r-h}) + \ldots\ldots$$

$$h^3 f'''(a) = \Delta^3 f(a) - \frac{3}{2}\,\Delta^4 f(a) + \frac{7}{4}\,\Delta^5 f(a) - \ldots\ldots$$

$$h^3 f'''(a+r-h) = \Delta^3 f(a+\overline{r-3}\,h) + \frac{3}{2}\,\Delta^4 f(a+\overline{r-4}h) + \frac{7}{4}\,\Delta^5 f(a+\overline{r-5}\,h) + \ldots\ldots$$

$$h^5 f^{v}(a) = \Delta^5 f(a) - \frac{5}{2}\,\Delta^6 f(a) + \ldots\ldots$$

$$h^5 f^{v}(a+rh) = \Delta^5 f(a+\overline{r-5}\,h) - \frac{5}{2}\,\Delta^6 f(a+\overline{r-6}\,h) + \ldots\ldots$$

யூலர்–மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தில், $h f'(a)$, $h f'(a+rh)$, $h^3 f'''(a)$, $h^3 f'''(a+rh)$, $h^5 f^{v}(a)$, $h^5 f^{v}(a+rh)$ ஆகியவைகளுக்கு மேலே உள்ள எண்ணியல் வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களிலிருந்து பிரதியிட்டுச் சுருக்கவும்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots \frac{1}{2}\, f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{1}{12}\left[\left\{ \Delta f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(a+\overline{r-2}h) + \ldots\ldots\right\} - \left\{\Delta f(a) - \frac{1}{2}\,\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) \ldots\ldots\right\}\right]$$

$$+ \frac{1}{720}\left[\left\{\Delta^3 f(a+\overline{r-3}h) + \frac{3}{2}\Delta^4 f(a+\overline{r-4}h) + \ldots\ldots\right\} - \left\{\Delta^3 f(a) - \frac{3}{2}\,\Delta^4 f(a) + \ldots\ldots\right\}\right]$$

$$- \frac{1}{30240}\left[\left\{\Delta^5 f(a+\overline{r-5})h + \frac{5}{2}\,\Delta^6 f(a+\overline{r-6}h) \ldots\right\} - \left\{\Delta^5 f(a) - \frac{5}{2}\Delta^6 f(a) + \ldots\ldots\right\}\right]$$

... ...

$$(11{\cdot}23)\quad \frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\, f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2}\, f(a+rh)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\Delta f(a+\overline{r-1}\,h)-\Delta f(a)\right]$$

$$-\frac{1}{24}\left[\Delta^2 f(a+\overline{r-2}\,h)+\Delta^2 f(a)\right]$$

$$-\frac{19}{720}\left[\Delta^3 f(a+\overline{r-3}\,h)-\Delta^3 f(a)\right]$$

$$-\frac{3}{160}\left[\Delta^4 f(a+\overline{r}-4\,h)+\Delta^4 f(a)\right]$$

$$-\frac{683}{60480}\left[\Delta^5 f(a+\overline{r-5}\,h)-\Delta^5 f(a)\right]$$

... ...

இதனை கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரம் என அழைக்கின்றோம். சார்பின் அமைப்புத் தெரியாமலிருந்து சார்பின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது, வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்து, இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தொகை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலிருந்து கிரிகோரியின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$\int_1^7 f(x)\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
1	287626699801
2	287757439208
3	287888218227
4	288019036864
5	288149895125
6	288280793016
7	288411730543

கிரிகோரியின் சூத்திரத்தைக் கவனிக்கவும் :

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{1}{12}\ [\triangle\ f(a+\overline{r-1}\,h) - \triangle\ f(a)]$$

$$- \frac{1}{24}\ [\triangle^2 f(a+\overline{r-2}\,h) + \triangle^2 f(a)]$$

$$- \frac{19}{720}\ [\triangle^3 f(a+\overline{r-3}\,h) - \triangle^3 f(a)]$$

$$- \frac{3}{160}\ [\triangle^4 f(a+\overline{r-4}\,h) + \triangle^4 f(a)]$$

$$- \frac{683}{60480}\ [\triangle^5 f(a+\overline{r-5}\,h) - \triangle^5 f(a)]$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண வேறுபாட்டட்ட வணையை அமைக்கவும்.

x	$f(x)$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$
1	287626699801			
		130739407		
2	287757439208		39612	
		130779019		6
3	287888218227		39618	
		130818637		6
4	288019036864		39624	
		130858261		6
5	288149895125		39630	
		130897891		6
6	288280793016		39636	
		130937527		
7	288411730543			

கிரிகோரியின் சூத்திரத்தில், இவ்வட்டவணையிலிருந்து மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \begin{array}{r} 143813349900{\cdot}5 \\ 287757439208{\cdot}0 \\ 287888218227{\cdot}0 \\ 288019036864{\cdot}0 \\ 288149895125{\cdot}0 \\ 288280793016{\cdot}0 \\ 144205865271{\cdot}5 \\ \hline 1728114597612{\cdot}0 \end{array} - 16510 - 3302$$

$$= 1728114577800$$

இச் சூத்திரத்தை உபயோகித்துத் தொகைப்படுத்தும் முறையை விளக்க இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 25 :

கிரிகோரியின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $\int_{25}^{30} \frac{dx}{x}$ன் மதிப்பைக் காண்க.

கிரிகோரியின் சூத்திரத்தில், (11·23)

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + \frac{1}{2} f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{1}{12}[\,\triangle f(a+\overline{r-1}\,h) - \triangle f(a)\,]$$

$$- \frac{1}{24}[\,\triangle^2 f(a+\overline{r-2}\,h) - \triangle^2 f(a)\,]$$

$$- \frac{19}{720}[\triangle^3 f(a + \overline{r-3}\,h) - \triangle^3 f(a)]$$

$$- \frac{3}{160}[\triangle^4 f(a + \overline{r-4}\,h) + \triangle^4 f(a)]$$

$$- \frac{683}{60480}[\triangle^5 f(a + \overline{r-5}\,h) - \triangle^5 f(a)] \ldots\ldots$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 25$, $h = 1$, $a + rh = 30$ எனக் கொள்ளவும். அப்பொழுது கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரமாவது,

$$(11{\cdot}24) \int_{25}^{30} \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{29} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{30}\right]$$

$$- \frac{1}{12}[\triangle f(29) - \triangle f(25)]$$

$$- \frac{1}{24}[\triangle^2 f(28) + \triangle^2 f(25)]$$

$$- \frac{19}{720}[\triangle^3 f(27) - \triangle^3 f(25)]$$

$$- \frac{3}{160}[\triangle^4 f(26) + \triangle^4 f(25)] \ldots$$

என எழுதலாம்.

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண சார்பினை அட்டவணைப்படுத்தவும். (தசம புள்ளிகள் நீங்கலாக).

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
25	0·040000000				
		−1538462			
26	0·038461538		113961		
		−1424501		−12202	
27	0·037037037		101749		1688
		−1322752		−10524	
28	0·035714285		91225		1401
		−1231527		−9123	
29	0·034482758		82102		
		−1149425			
30	0·033333333				

(11·24)-ல் சார்புகளுக்கும், வேறுபாடுகளுக்கும் பிரதியிடவும்.

$$\int_{25}^{30} \frac{dx}{x} = 182362285 - \frac{1}{12}(1538452 - 1149425)$$

$$- \frac{1}{24}(82102 + 113961)$$

$$- \frac{19}{720}(12202 - 9123)$$

$$- \frac{3}{160}(1401 + 1688) \ldots\ldots$$

$$= 0 \cdot 182362285 - 0 \cdot 000040589$$

$$= \underline{0 \cdot 18232156}$$

எடுத்துக்காட்டு 26 :

கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $\int_0^7 f(x)\, dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க. $f(x)$ கீழே அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது.

x	$f(x)$
1	2·87627
2	2·87757
3	2·87888
4	2·88019
5	2·88150
6	2·88281
7	2·88412

(B.Sc. 1961)

கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரத்தில் (11·23)

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots + \frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\triangle\, f(a+\overline{r-1}\,h) - \triangle\, f(a)\right]$$

$$-\frac{1}{24}\left[\triangle^2 f(a+\overline{r-2}\,h) - \triangle^2 f(a)\right]$$

$$-\frac{19}{720}\left[\triangle^3 f(a+\overline{r-3}\,h) - \triangle^3 f(a)\right]$$

$$-\frac{3}{160}\left[\triangle^4 f(a+\overline{r-4}\,h) + \triangle^4 f(a)\right]$$

$a = 1,\ h = 1.\ \ a + rh = 7$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\int_{1}^{7} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + \frac{1}{2}f(7)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\triangle\, f(6) - \triangle\, f(1)\right]$$

$$-\frac{1}{24}\left[\triangle^2 f(5) + \triangle^2 f(1)\right]$$

$$-\frac{19}{720}\left[\triangle^3 f(4) - \triangle^3 f(1)\right]$$

$$-\frac{3}{160}\left[\triangle^4 f(3) + \triangle^4 f(1)\right] - \ldots$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண, வேறுபாட்டட்ட வணையை அமைக்கவும்.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
1	2·87627		
		130	
2	2·87757		1
		131	
3	2·87888		0
		131	
4	2·88019		0
		131	
5	2·88150		0
		131	
6	2·88281		0
		131	
7	2·88412		

மேலே உள்ள சூத்திரத்தில் வேறுபாடுகளுக்கு மதிப்பிடவும்.

$$\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 17{\cdot}281145 - 0{\cdot}0000012$$

$$= \underline{17{\cdot}2811438}$$

இலபக்கின் சூத்திரம். (தொடர் கூட்டல்)
(Lubbock's formula of summation)

இலபக்கின் தொகைச் சூத்திரத்தை யூலர் மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்திலிருந்து நிறுவப்படுகின்றது.

யூலர் மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தைக் கவனிக்கவும்.

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \Big[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} f(a+rh)\Big]$$

$$- \frac{h}{12}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720}[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240}[f^v(a+rh) - f^v(a)] \ldots\ldots$$

மாறியின் இரு மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை, அதாவது h ஐ, m சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும். அதாவது h ஐ m ஆல் வகுக்கவும். அப்பொழுது மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரமாவது,

$$(11{\cdot}25) \quad \frac{m}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[f(a) + f\left(a + \frac{1}{m}\right) + f\left(a + \frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots + f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{1}{2}[f(a) + f(a+rh)]$$

$$- \frac{h}{12m}[f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{h^3}{720\,m^3}[f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{h^5}{30240\,m^5}[f^v(a+rh) - f^v(a)] \ldots\ldots$$

ஆயலர்-மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரத்தை இருபுறங்களையும் m ஆல் பெருக்கவும்.

$$(11{\cdot}26) \quad \frac{m}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = m\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}f(a+rh]\right]$$

$$- \frac{mh}{12} [f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{mh^3}{720} [f'''(a+rh) - f'''(a)]$$

$$- \frac{mh^5}{30240} [f^v(a+rh) - f^v(a)] + \ldots\ldots$$

(11·25), (11·26) ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் இடப்பக்கங்கள் சமமாக இருப்பதால், வலப்பக்கங்களைச் சமன் படுத்தலாம்.

$$(11{\cdot}27) \quad \therefore \quad [f(a) + f\left(a + \frac{1}{m}\right) + f\left(a + \frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$= m[f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$- \frac{m-1}{12} [f(a+rh) + f(a)]$$

$$- \frac{m^2-1}{12m} \cdot h \cdot [f'(a+rh) - f'(a)]$$

$$+ \frac{m^4-1}{720\, m^3} \cdot h^3 [f'''(a+rh) - f'''(a)] - \ldots\ldots$$

இதனை ஹூல்ஹவுஸ் சூத்திரம் (Woolhouse formula) என அழைக்கின்றோம். இச் சூத்திரத்தில், கிரிகோரியின் சூத்திரத்தில் செய்ததுபோல, வகைவேறுபாட்டுக் குணகங்களுக்குப் பதிலாக, வகைவேறுபாட்டுச் சூத்திரங்களைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்கினால் இலபக்கின் சூத்திரத்தைப் பெறலாம்

$$(11{\cdot}28) \quad \therefore \quad [f(a) + f\left(a + \frac{1}{m}\right) + f\left(a + \frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$= m[f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$- \frac{m-1}{2} [f(a+rh) + f(a)]$$

$$- \frac{m^2-1}{12m} [\triangle f(a+\overline{r-1}h) - \triangle f(a)]$$

$$- \frac{m^2-1}{24m}[\Delta^2 f(a+\overline{r-2}h) + \Delta^2 f(a)]$$

$$- \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720\, m^3}[\Delta^3 f(a+\overline{r-3}h) - \Delta^3 f(a)]$$

$$- \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480\, m^3}[\Delta^4 f(a+\overline{r-4}h) + \Delta^4 f(a)]$$

$$- \ldots\ldots$$

இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணும் முறையைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 27 :

இலபக்கின் தொகைச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து, இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{150^2}$$ (ஏப்ரல் 1961)

இலபக்கின் சூத்திரத்தில்

$$[f(a) + f\left(a+\frac{1}{m}\right) + f\left(a+\frac{2}{m}\right) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$= m[f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + f(a+rh)]$$

$$- \frac{m-1}{2}[f(a+rh) + f(a)]$$

$$- \frac{m^2-1}{12m}[\Delta f(a+\overline{r-1}h) - \Delta f(a)]$$

$$- \frac{m^2-1}{24m}[\Delta^2 f(a+\overline{r-2}h) - \Delta f(a)]$$

$$- \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720m^3}[\Delta^3 f(a+\overline{r-3}h) - \Delta^3 f(a)] \ldots$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a=100$, $h=10$, $m=10$ என வைக்கவும்.

$$\left[\frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{150^2}\right]$$

$$= 10\left[\frac{1}{100^2} + \frac{1}{110^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{150^2}\right]$$

$$- \frac{10-1}{2}]f(150) + f(100)]$$

$$- \frac{10^2-1}{12 \times 10} [\triangle f(140) - \triangle f(100)]$$

$$- \frac{10^2-1}{24 \times 10} [\triangle^2 f(130) + \triangle^2 f(100)]$$

$$- \frac{(10^2-1)(19 \times 10^2 - 1)}{720 \times 10^3} [\triangle^3 f(120) - \triangle^3 f(100)] \ldots$$

இதிலுள்ள வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண, வேறு பாட்டட்டவணையை அமைக்கவும். (தசமபுள்ளிகள் நீங்கலாக)

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\triangle f(x)$	$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
100	0·00010000				
		– 1736			
110	0·00008264		416		
		– 1320		– 123	
120	0·00006944		293		42
		– 1027		– 81	
130	0·00005917		212		26
		– 815		– 55	
140	0·00005102		157		
		– 658			
150	0·00004444				

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் வேறுபாடுகளுக்கு அட்ட வணையிலிருந்து பிரதியிடவும்.

$$\therefore \left[\frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{150^2}\right]$$

$$= 10 \, [0{\cdot}00040671]$$

$$- 4{\cdot}5 \,]0{\cdot}00004444 + 0{\cdot}00010000]$$

$$- \frac{99}{120} [0{\cdot}00001736 - 0{\cdot}00000658]$$

$$- \frac{99}{240} [0{\cdot}00000157 + 0{\cdot}00000416]$$

$$- \frac{99 \times 1899}{720000} \; [-0{\cdot}00000055 - 0{\cdot}000000123\,]$$

$$- \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$= 0{\cdot}0040671 - 0{\cdot}0004615$$

$$= \underline{0{\cdot}0034056}$$

எடுத்துக்காட்டு 28:

$\sum\limits_{50}^{100} \frac{1}{n^2}$ ன் மதிப்பினை 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் காண்க.

இதனை இலபக்கின் சூத்திரத்தை உபயோகித்துக் கணக்கிடலாம். இச்சூத்திரத்தில் (11·28)

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $h = 10$, $m = 10$ $a = 50$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{50^2} + \frac{1}{51^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{100^2} = 10\,[\,f(50) + f(60) + \ldots\ldots + f(100)\,]$$

$$- \frac{10-1}{2}\,[\,f(50) + f(100)\,]$$

$$- \frac{10^2-1}{12 \times 10}\,[\,\triangle f(90) - \triangle f(50)\,]$$

$$- \frac{10^2-1}{24 \times 10}\,[\,\triangle^2 f(80) + \triangle^2 f(50)\,]$$

$$- \frac{(10^2-1)\,(19 \times 10^2 - 1)}{720 \times 10^3}\,[\,\triangle^3 f(70) - \triangle^3 f(50)\,]$$

$$- \frac{(10^2-1)\,(9 \times 10^2 - 1)}{480 \times 10^3}\,[\,\triangle^4 f(60) + \triangle^4 f(50)\,]$$

$$- \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண வேறுபாட்டட்ட வணையை அமைக்கவும். (தசம புள்ளிகள் நீங்கலாக)

n	$f(n) = \frac{1}{n^2}$	$\triangle f(n)$	$\triangle^2 f(n)$	$\triangle^3 f(n)$	$\triangle^4 f(n)$
50	0·0004000				
		– 1223			
60	0·0002777		487		
		– 736		– 230	
70	0·0002041		257		129
		– 479		– 101	
80	0·0001562		151		44
		– 328		– 57	
90	0·0001234		94		
		– 234			
100	0·0001000				

இவ்வட்டவணையிலிருந்து மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிடவும்.

$$\sum_{50}^{100} \frac{1}{n^2} = 10\,[0{\cdot}0012604]$$

$$- 4{\cdot}5\,[0{\cdot}0001 + 0{\cdot}0004]$$

$$- \frac{99}{120}\,[0{\cdot}0001223 - 0{\cdot}0000234]$$

$$- \frac{99}{240}\,[0{\cdot}0000094 + 0{\cdot}0000487]$$

$$- \frac{99 \times 1899}{720000}\,[0{\cdot}0000230 - 0{\cdot}0000057]$$

$$- \frac{99 \times 899}{480000}\,[0{\cdot}0000044 + 0{\cdot}0000129]$$

$$= \underline{0{\cdot}0102512}$$

மைய வேறுபாட்டுத் தொகைச் சூத்திரம்
(Central Difference formula of Numerical Integration)

$$\frac{1}{h}\int_{a}^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots + \frac{1}{2} f(a+rh)\right]$$

$$- \frac{1}{12}\left[\frac{\triangle f(a+rh) + \triangle f(a+\overline{r-1}\,h)}{2} - \frac{\triangle f(a) + \triangle f(a-h)}{2}\right]$$

$$- \frac{11}{720}\left[\frac{\triangle^3 f(a+\overline{r-1}\,h) + \triangle^3 f(a+\overline{r-2}\,h)}{2} - \frac{\triangle^3 f(a-h) + \triangle^3 f(a-2h)}{2}\right]$$

... ...

இம் மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தில் ஒற்றைப் படை வேறுபாடுகளே உள்ளன. மேலும் சார்பின் மதிப்புத் தொகையெல்லைகளுக்கு வெளியேயிருக்கும். பெஸ்ஸலின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைத் தொகைப்படுத்தி இச் சூத்திரத்தை நிறுவலாம்.

பெஸ்ஸலின் இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது:

$$f\left(a + Xh + \frac{1}{2}h\right) = \frac{f(a) + f(a+h)}{2} + X \triangle f(a)$$

$$+ \frac{(X^2 - \frac{1}{4})}{2!}\ \frac{\triangle^2 f(a-h) + \triangle^2 f(a)}{2}$$

$$+ \frac{X(X^2 - \frac{1}{4})}{3!}\ \triangle^3 f(a-h)$$

$$+ \frac{(X^2 - \frac{1}{4})(X^2 - \frac{9}{4})}{4!}\ \frac{\triangle^4 f(a-2h) + \triangle^4 f(a-h)}{2}\ldots\ldots$$

இங்கு $a + Xh + \frac{1}{2}h = x$ எனக் கொண்டால்

$x = a$ ஆக இருக்கும் பொழுது $X = -\frac{1}{2}$ ஆகவும்,

$x = a + h$ ஆக இருக்கும் பொழுது $X = +\frac{1}{2}$ ஆகவும் உள்ளது.

பெஸ்ஸலின் சூத்திரத்தைத் தொகைப்படுத்தவும்.

$$\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx = h\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + X\triangle f(a)$$

$$+\frac{(X^2-\frac{1}{4})}{2!}\,\frac{\triangle^2 f(a-h)+\triangle^2 f(a)}{2}$$

$$+\frac{X(X^2-1)}{3!}\triangle^3 f(a-h)$$

$$+\frac{(X^2-\frac{1}{4})(X^2-\frac{9}{4})}{4!}\,\frac{\triangle^4 f(a-2h)+\triangle^4 f(a-h)}{2}\Big]dx \ldots$$

$$= h\Big[\frac{f(a+h)+f(a)}{2} - \frac{1}{12}\,\frac{\triangle^2 f(a)+\triangle^2 f(a-h)}{2}$$

$$+\frac{11}{720}\,\frac{\triangle^4 f(a-2h)+\triangle^4 f(a-h)}{2}\Big] \ldots\ldots$$

இதேபோல் $(a+h)$ லிருந்து $(a+2h)$ வரை தொகைப் படுத்தினால்

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx = h\Big[\frac{f(a+2h)+f(a+h)}{2}$$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{\triangle^2 f(a)+\triangle^2 f(a+h)}{2} + \frac{11}{720}\,\frac{\triangle^4 f(a-h)+\triangle^4 f(a)}{2} - \ldots\Big]$$

$$\int_{a+\overline{r-1}h}^{a+rh} (f(x)\,dx = h\Big[\frac{f(a+rh)+f(a+\overline{r-1}h)}{2}$$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{\triangle^2 f(a+\overline{r-1}h)+\triangle^2 f(a+\overline{r-2}h)}{2}$$

$$+\frac{11}{720}\,\frac{\triangle^4 f(a+\overline{r-2}h)+\triangle^4 f(a+\overline{r-3}h)}{2} \ldots\ldots$$

இத்தொகைகளைக் கூட்டவும்.

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots\ldots f(a+\overline{r-1}h) + \frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\frac{\triangle^2 f(a-h)}{2}+\triangle^2 f(a)+\triangle^2 f(a+h)+\ldots\ldots\frac{1}{2}\triangle^2(fa+\overline{r-1}h)\right]$$

$$+\frac{11}{720}\left[\frac{\triangle^4 f(a+\overline{r-2}h)}{2}+\triangle^4 f(a-h)+\ldots\ldots+\triangle^4 f(a+\overline{r-2}h)\right]$$

$$-\ldots\ldots$$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளை உபயோகித்து இரட்டை வேறுபாடுகளை நீக்கவும்.

$$\triangle^2 f(a-h) = \triangle f(a) - \triangle f(a-h)$$

$$\triangle^2 f(a) \quad = \triangle f(a+h) - \triangle f(a)$$

$$\triangle^2 f(a+\overline{r-1}h) = \triangle f(a+rh) - \triangle f(a+\overline{r-1}h)$$

$$\triangle^4 f(a-2h) \quad = \triangle^3 f(a-h) - \triangle^3 f(a-2h)$$

$$\triangle^4 f(a+\overline{r-2}h) = \triangle^3 f(a+\overline{r-1}h) - \triangle^3 f(a+\overline{r-2}h)$$

இவைகளை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுச் சுருக்கவும்.

$$(11{\cdot}29)\quad \frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots\ldots + f(a+\overline{r-1}h)+\frac{1}{2}f(a+rh)$$

$$-\frac{1}{12}\left[\frac{\triangle f(a+rh)+\triangle f(a+\overline{r-1}h)}{2}-\frac{\triangle f(a-h)+\triangle f(a)}{2}\right]$$

$$-\frac{11}{720}\left[\frac{\triangle^3 f(a+\overline{r-1}h)+\triangle^3 f(a+\overline{r-2}h)}{2}-\frac{\triangle^3 f(a-h)+\triangle^3 f(a-2h)}{2}\right]$$

$$-\frac{191}{60480}\left[\frac{\triangle^5 f(a+\overline{r-2}h)+\triangle^5 f(a+\overline{r-3}h)}{2} - \frac{\triangle^5 f(a-2h)+\triangle^5 f(a-3h)}{2}\right]+\ldots\ldots$$

இதனை மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரம் என அழைக்கின்றோம்.

இச் சூத்திரத்தை உபயோகித்துச் சார்பினைத் தொகைப் படுத்தும்முறை கீழ்க்கண்ட எடுத்துக் காட்டால் விளக்கப் படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 29:

மைய வேறுபாட்டுத் தொகைச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ –ன் மதிப்பினைக் காண்க.

மையவேறுபாட்டுத் தொகைச் சூத்திரத்தில்

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\ldots\ldots+\frac{1}{2}f(a+rh)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\frac{\triangle f(a+\overline{r-1}h)+\triangle f(a+rh)}{2}-\frac{\triangle f(a)+\triangle f(a-h)}{2}\right.$$

$$+\frac{11}{720}\left[\frac{\triangle^3 f(a+\overline{r-1}h)+\triangle^3 f(a+\overline{r-2}h)}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{\triangle^3 f(a-2h)+\triangle^3 f(a-h)}{2}\right]$$

... ...

$f(x)=\frac{1}{x}$, $a=1$, $a+rh=2$, $h=0{\cdot}1$ என வைக்கவும்.

அப்பொழுது

$$\frac{1}{0{\cdot}1}\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{2}f(1{\cdot}0)+f(1{\cdot}1)+\ldots\ldots+f(1{\cdot}9)+\frac{1}{2}f(2{\cdot}0)\right]$$

$$-\frac{1}{12}\left[\frac{\triangle f(2)+\triangle f(1{\cdot}9)}{2}-\frac{\triangle f(1)+\triangle f(0{\cdot}9)}{2}\right]$$

$$+\frac{11}{720}\left[\frac{\triangle^3 f(1{\cdot}9)+\triangle^3 f(1{\cdot}8)}{2}-\frac{\triangle^3 f(0{\cdot}9)+\triangle^3 f(0{\cdot}8)}{2}\right]$$

$$-\frac{191}{60480}\left[\frac{\triangle^5 f(1{\cdot}8)+\triangle^5 f(1{\cdot}7)}{2}-\frac{\triangle^5 f(0{\cdot}8)+\triangle^5 f(0{\cdot}7)}{2}\right]$$

...... என ஆகும்.

இவ்வேறுபாடுகளின் மதிப்புகளைக் காண, சார்பினை $x=0{\cdot}7$ லிருந்து $x=2{\cdot}3$ வரை அட்டவணைப்படுத்தி வேறுபாட்டட்டவணையை அமைத்தல் வேண்டும்.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0·7	1·42857143					
		– 17857143				
0·8	1·25000000		3968254			
		– 13888889		– 119047		
0·9	1·11111111		2777778		432900	
		– 11111111		– 757576		– 180375
1·0	1·00000000		2020202		252525	
		– 9090909		– 505051		– 97123
1·1	0·9090909		1515151		155402	
		– 7575758		– 349649		
1·2	0·83333333		1165502			
		– 6410256				
1·3	0·76923077					
......						

1·7	0·58823529					
		−3267973				
1·8	0·55555556		343996			
		−2923977		−51598		
1·9	0·52631579		292398		9827	
		−2631579		−41771		−2234
2·0	0·50000000		250627		7593	
		−2380952		−34178		−1645
2·1	0·47619048		216449		5948	
		−2164503		−28230		
2·2	0·45454545		188219			
		−1976284				
2·3	0·43478261					

இவ் வேறுபாட்டட்டவணையிலிருந்து, வேறுபாடுகளுக்குப் பிரதியிடவும்.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{\cdot}1\left[6{\cdot}93771403 - \frac{1}{12}(0{\cdot}07594744) + \frac{11}{720}(0{\cdot}00593339) - \frac{191}{60480}(0{\cdot}00136810)\right]$$

$$= \underline{0{\cdot}69314714}$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x} = \underline{0{\cdot}69314714}$$

'நியூட்டன்-கோட்ஸ்'ஸின் தொகைச் சூத்திரம்:

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \sum_0^n \frac{(-1)^{n-r} f(x_0+rh)\,.\,h}{r\,!\,(n-r)\,!}$$

$$\int_0^n u\,(u-1)\,(u-r-1)\,(u-r+1)\,\ldots\,(u-n)\,du$$

இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைத் தொகைப் படுத்தி இத்தொகைச் சூத்திரத்தைப் பெறும் முறையைப் பார்ப்போம்.

$f\,(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்பொழுது

x	$f\,(x)$
x_0	$f\,(x_0)$
x_1	$f\,(x_1)$
x_2	$f\,(x_2)$
x_3	$f\,(x_3)$
...	...
...	...
...	...
x_n	$f\,(x_n)$

இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $f(x)$-ஐ மதிப்பிடலாம். அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பு $(n+1)$ ஆவது படியை விடக் குறைவாக இருக்கு மானல் அதனைச் சரியாக மதிப்பிடலாம். எனவே அட்ட வணைப் படுத்தப்பட்டுள்ள சார்பினைத் தொகைப்படுத்த, இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரத்தை x_0 லிருந்து x_n க்குள் தொகைப் படுத்திச் சார்பின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடல் வேண்டும். இலக்ரான்ஜின் இடைச் செருகல் சூத்திரமாவது

$$f(x) = \sum_0^n \frac{\phi(x)}{x - x_r} \cdot \frac{1}{\phi'(x_r)} \cdot f(x_r)$$

இதில் $\phi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_r)\ldots\ldots(x - x_n)$

$$\phi'(x_r) = (x_r - x_0)(x_r - x_1)\ldots\ldots(x_n - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \ldots\ldots (x_r - x_n)$$

இடைச் செருகல் சூத்திரத்தைத் தொகைப் படுத்தவும்.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \left[\sum_0^n \frac{\phi(x)}{x - x_r} \frac{1}{\phi'(x_r)} f(x_r) \right] dx$$

$$= \sum_0^n \frac{f(x_r)}{\phi'(x_r)} \int_{x_0}^{x_n} \frac{\phi(x)}{x - x_r} \cdot dx$$

இங்கு $\dfrac{\phi(x)}{x - x_r}$, x_0 லிருந்து x_n க்குள் ஒரு சீராகக் குவிவ தால் (uniformly convergent) தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல் (Term by term integration) முறையைப் பின்பற்று கிறேம்.

இதில் $x_0 = -1$, $x_1 = -1 + \dfrac{2}{n}$, $x_2 = -1 + \dfrac{4}{n}$, ...

$$x_r = -1 + 2\frac{r}{n}, \ \ldots\ldots\ x_n = +1$$

என வைத்துக்கொள்ளவும்.

அதாவது $h = \dfrac{2}{n}$

$$(11{\cdot}30) \quad \therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{0}^{n} \frac{f(x_r)}{\phi'(x_r)} \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{x - x_r} \cdot dx$$

இதில் $\phi'(x_r)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\phi'(x_r) = (x_r - x_0)(x_r - x_1)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})(x_r - x_n)$$

ஆனால் $x_r = -1 + 2\frac{r}{n}$ ஆகும்.

$$\therefore \phi'(x_r) = \Big[-1 + \frac{2r}{n} + 1\Big)\Big(-1 + \frac{2r}{n} + 1 - \frac{2}{n}\Big) \ldots\ldots$$

$$\Big(-1 + \frac{2r}{n} + 1 - \frac{2\,\overline{r-1}}{n}\Big)\Big(-1 + \frac{2r}{n} + 1 - \frac{2\,\overline{r+1}}{n}\Big)$$

$$\ldots\ldots\Big(-1 + \frac{2r}{n} - 1\Big)\Big]$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n [\,r(r-1)\ldots(r - \overline{r-1})(r - \overline{r+1})\ldots(r-n)\,]$$

$$= (-1)^{n-r}\left(\frac{2}{n}\right)^n r!\,(n-r)!$$

இது போலவே $\frac{\phi x}{x - x_r}$ ன் மதிப்பினைக் காண்போம்.

$$\frac{\phi(x)}{x - x_r} = (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots\ldots(x - x_n)$$

$$= (x+1)\left(x + 1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(x + 1 - \frac{2\,\overline{r-1}}{n}\right)$$

$$\left(x + 1 - \frac{2\,\overline{r+1}}{n}\right)\ldots\ldots(x-1)$$

வலப்பக்கத்தில் உள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் $\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n}{2}\right)$ ஆல் பெருக்கவும்.

$$\therefore \quad \frac{\phi(x)}{x-x_r} = \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[\frac{n}{2}(x+1)\,.\,\frac{n}{2}\left(x+1-\frac{2}{n}\right) \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \frac{n}{2}\left(x+1-\frac{2\,\overline{r-1}}{n}\right).\,\frac{n}{2}\left(x+1-\frac{2\,\overline{r+1}}{n}\right)\ldots\frac{n}{2}(x-1)\right]$$

இதில் $\frac{n}{2}(x+1) = u$ என வைக்கவும்.

$$\therefore \quad dx = \frac{2}{n}\,du \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\phi(x)}{x-x_r} = \left(\frac{2}{n}\right)^n u(u-1)\ldots(u-r-1)\,(u-r+1)\ldots(u-n)$$

(11·30) ஆவது சமன்பாட்டில், $\phi'(x_r)$, $\frac{\phi(x)}{x-x_r}$ ஆகியவை களின் மதிப்புகளைப் பிரதியிடவும்.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^{n-r} f(x_r)}{r!\;(n-r)!}\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\text{X} \quad \int_{0}^{n} u\,(u-1)\,\ldots\,(u-r+1)\,(u-r-1)\,\ldots\,(u-n)\,du$$

இதில் $x_r = x_0 + rh$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$(11{\cdot}31) \quad \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \sum \frac{(-1)^{n-r} f(x_0+rh)}{r!\,(n-r)!}\,.\,h\,.$$

$$\text{X} \quad \int_{0}^{n} u\,(n-1)\,\ldots\,(u-r-1)\,(u-r+1)\,\ldots\,(u-n)\,du$$

இதனை நியூட்டன்–கோட்ஸ்ஸின் தொகைச் சூத்திரம் என அழைக்கின்றோம். இதில் $n=1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட்டால், சரிவகவிதி, சிம்ஸனின் விதிகள் ஆகியவைகளை முறையே பெறலாம்.

நியூட்டன்-கோட்ஸ்ஸின் சூத்திரத்தில் $r = 1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட முறையே சரிவக விதி, சிம்ஸனின் விதிகளைப் பெறலாம்.

நியூட்டன்-கோட்ஸ்ஸின் சூத்திரமாவது :

$$(11\cdot32)\quad \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h) + H_2 f(x_0+2h) + \ldots\ldots H_n f(x_0+nh)$$

$$(11\cdot33)\quad \text{இங்கு } H_r = \frac{(-1)^{n-r} h}{r!\,(n-r)!}\int_0^n u(u-1)\ldots(u-r-1)(u-r+1)(u-n)\,du$$

எனக் குறிக்கின்றோம்.

இதில் $n = 1$ என வைக்கவும்.

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h)$$

(11·33) ல் $r = 0,\ n = 1$ என வைக்கவும்.

$$H_0 = \frac{(-1)^1 h}{1}\int_0^1 (u-1)\,du = -h\left[\frac{u^2}{2} - u\right]_0^1 = \frac{1}{2}h$$

$$H_1 = (-1)^0 h\int_0^1 u\,du = h\,.\,\frac{u^2}{2}\Big[_0^1 = \frac{1}{2}h$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h)$$

$$= \tfrac{1}{2}h f(x_0) + \tfrac{1}{2}h f(x_0+h)$$

$$= \tfrac{1}{2}h\,[\,f(x_0) + f(x_0+h)\,]$$

இதனைச் சரிவக விதி என அழைக்கின்றோம்.

சிம்ஸனின் விதி :

(11·32) ல் $n = 2$ என வைக்கவும்.

$$(11{\cdot}34) \quad \therefore \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h) + H_2 f(x_0+2h)$$

(11·33) ல் $r = 0$ என வை.

$$H_0 = \frac{(-1)^2 h}{2!} \int_0^2 (u-1)(u-2)\,du$$

$$= \frac{h}{3}$$

$r = 1$ என வை.

$$H_1 = \frac{(-1)^1 h}{1!} \int_0^2 u(u-2)\,du$$

$$= \frac{4}{3} h$$

$r = 2$ என வைக்கவும்.

$$H_2 = \frac{(-1)^0 h}{2!} \int_0^2 u(u-1)\,du$$

$$= \frac{h}{3}$$

H_0, H_1 & H_2 ஆகியவைகளுக்கு (11·34)ல் பிரதியிடவும்.

$$(11{\cdot}35) \quad \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_0+h) + f(x_0+2h) \right]$$

இதுவே சிம்ஸனின் விதியாகும்.

சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ வது விதி:

(11·32) ல் $n = 3$ என வை.

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h) + H_2 f(x_0+2h) + H_3 f(x_0+3h)$$

(11·33)ல் $r = 0, 1, 2, 3$ என வைக்கவும்.

$$H_0 = \frac{(-1)^3 h}{3!}\int_0^3 (u-1)(u-2)(u-3)\,du = \frac{3}{8} h$$

$$= H_2$$

$r = 1$ எனவை.

$$H_1 = \frac{(-1)^{3-2} h}{1!\,(2)!}\int_0^3 u(u-2)(u-3)\,du$$

$$= \frac{9}{8} h = H_2$$

H_0, H_1, H_2, H_3 ஆகியவைகளின் மதிப்புகளை (11·35) ல் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx = \frac{3}{8} h\,[\,f(x_0) + 3f(x_0+h) + 3f(x_0+2h) + f(x_0+3h)$$

இது சிம்ஸனின் $\frac{3}{8}$ சூத்திரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 30 :

நியூட்டன்-கோட்ஸின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ன் மதிப்பைக் காண்க. தொகைச் சார்பின் 7 மதிப்புகளை உபயோகிக்கவும்.

முதலில் சார்பினை ஏழு இடங்களில் சம தூரத்தில் அட்டவணைப்படுத்தவும்.

x	x	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
x_0	0	1
x_0+h	1/6	36/37
x_0+2h	2/6	9/10
x_0+3h	3/6	4/5
x_0+4h	4/6	9/13
x_0+5h	5/6	36/61
x_0+6h	1	1/2

நியூட்டன் கோட்ஸ்ஸின் சூத்திரமாவது

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_0+h) + H_2 f(x_0+2h) + H_3 f(x_0+3h) + H_4 f(x_0+4h) + H_5 f(x_0+5h) + H_6 f(x_0+6h)$$

இதில் $x_0 = 0$, $x_0 + nh = 1$, $n = 6$, $h = \frac{1}{6}$ என எடுத்துக் கொண்டு H_0, H_1, ... H_6 ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண, கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில்

$$H_r = \frac{(-1)^{n-r} \cdot h}{r!\,(n-r)!} \int_0^n u(u-1) \cdot (u-r-1)(u-r+1) \cdot (u-r)\,du$$

$r = 0, 1$ ...... 6 எனப் பிரதியிடவும்.

இங்கு

$$H_0 = H_6 = \frac{41}{840}$$

$$H_1 = H_5 = \frac{9}{35}$$

$$H_2 = H_4 = \frac{9}{280}$$

$$H_3 = \frac{34}{105}$$

இவைகளை நியூட்டன்-கோட்ஸின் தொகைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிடவும்.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{41}{840} \times 1 + \frac{9}{35} \cdot \frac{36}{37} + \frac{9}{280} \cdot \frac{9}{10} + \frac{34}{105} \times \frac{4}{5}$$

$$+ \frac{9}{280} \times \frac{9}{13} + \frac{9}{35} \times \frac{36}{61} + \frac{41}{80} \times \frac{1}{2} \Big]$$

$$= \underline{0{\cdot}0732143}$$

பயிற்சி 11

1. 10 மதிப்புகளைக் கொண்டு, $xy = 1$ என்ற வரைகோட்டிற்கும் $x = 1$, $x = 2$ ஆகிய இரு மதிப்புகளுக்கிடையேயுள்ள பரப்பை சிம்ஸனின் சூத்திரத்தை உபயோகித்துக் காண்க.

2. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ என்ற வரைகோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும், $x = 1$ க்கும் $x = 2$ க்குமிடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

3. மைய வேறுபாட்டுச் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக

$$\sum_{100}^{200} \frac{1}{n^2}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

5. வெடிலின் விதியை உபயோகித்து

$$\int_0^6 x\sqrt{6-x}\,dx$$ ன் தோராய மதிப்பினைக் கண்டுபிடி.

6. $$\sum_{100}^{200} \frac{1}{\sqrt{n}}$$ ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

7. $$\log\left(\frac{100\,!}{40\,!\;60\,!}\right)$$ ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

8. $f(x)$ ஒரு ஐந்தாம்படி பல்லுறுப்புக் கோவையாக இருக்கும்பொழுது

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{8}{9}\,f(0) + \frac{5}{9}\,[\,f(\sqrt{0{\cdot}6}) + f(-\sqrt{0{\cdot}6})\,]$$

என நிரூபி.

9. வெடிலின் விதியை உபயோகித்து 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. 7 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக $\sum_{50}^{100} \frac{1}{n^3}$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

11. $\log_{10} 89\,!$ ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

12. கிரிகோரியின் தொகைச் சூத்திரம், யூலர் மக்லாரின் தொகைச் சூத்திரம் ஆகிய இரண்டையும் உபயோகித்து

$$\int_{100}^{105} \frac{dx}{x}$$ ன் மதிப்பைக் காண்.

13. கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் கூட்டுத்தொகையை 8 தசம இடங்களுக்குச் சரியாகக் கண்டுபிடி.

$$\frac{1}{201^2} + \frac{1}{202^2} + \frac{1}{203^2} + \ldots\ldots \frac{1}{301^2}.$$

14. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots\ldots + 10^5$ ன் மதிப்பு என்ன ?

15. இலபக்கின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$$\sum_{50}^{100} \frac{1}{x^2}$$ ன் மதிப்பைப் பெறுக.

16. ஐந்தாம் படி வேறுபாடுகள் மிகச் சிறியதாக இருக்கும் பொழுது

$$\int_a^{a+6n} f(x)\,dx = 0{\cdot}28\ [f(a) + 2f(a+6) + 2f(a+12) + \ldots\ldots + f(a+6n)]$$

$$+ 1{\cdot}62\ [f(a+1) + f(a+3) + f(a+5) + \ldots\ldots + f(a+6n-1)]$$

$$+ 0{\cdot}58\ [f(a+3) + f(a+9) + \ldots\ldots + f(a+6n-3)]$$

என நிரூபி.

17. 8 இடைவெளிகளில் சார்பினைக் கணக்கிட்டு, சிம்ஸனின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து

$$I = \int_{200}^{1000} \frac{dx}{\log_{10} x}$$ ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

18. வெடிலின் சூத்திரத்தை உபயோகித்து, 4 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக

$$\int_0^6 \frac{dx}{(1+x)^2}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

19. தொகை யெல்லையை 8 சமபாகங்களாகப் பிரித்து சிம்ஸனின் விதியை உபயோகித்து

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

(III. B.E. 1968)

20. கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தை நிறுவுக.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{13}{12}\left[f(1)+f(-1)\right] - \frac{1}{12}\left[f(3)+f(-3)\right]$$

21. $\triangle^m f(x) = 0, \quad m > 6,$ ஆக இருக்குமானல்

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 0{\cdot}3\,[f(0)+f(6)+f(2)+f(4) + 5\{f(1)+f(5)\}+6f(3)]$$

எனக் காட்டுக.

இதை உபயோகித்து $\int_0^6 (1+x)^{-2}\,dx = 0{\cdot}8806$ என நிரூபி.

22. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து $\int_0^6 f(x)\,dx$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

x	$f(x)$
0	0·146
1	0·161
2	0·176
3	0·190
4	0·204
5	0·217
6	0·230

23. $\sum_{1}^{1000} \frac{1}{m}$ ன் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

24. 6 தசம இடங்களுக்குச் சரியாக

$\sum_{100}^{200} \frac{1}{n^{3/2}}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

12. நழுவுச்சட்டமும் நேமவரையமும்

(Slide Rule and Nomography)

நழுவுச் சட்டம் (Slide Rule)

எண்களைப் பெருக்குவதற்கும், வகுப்பதற்கும் உதவுகின்ற ஒரு எளிய கருவி நழுவுச் சட்டம் ஆகும். சிலர் இதனை நழுவுக் கணிப்பான் என்றும் அழைக்கின்றனர். இது கணித்தத்திலுள்ள சிக்கல்களையும் உழைப்பையும் தவிர்த்து, விரைவாக எளிய முறையில் கணிப்பதற்கு மிகவும் பயன்படுகின்றது. நழுவுச் சட்டத்தை உபயோகிக்க மடக்கையறிவு அவசியம். ஏனெனில் மடக்கையின் மதிப்புகளைக்கொண்டு இச்சட்டம் அமைந்துள்ளது. நழுவுச் சட்டத்தில் மடக்கையின் மதிப்புகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்டிருப்பதால், கூட்டல், கழித்தல் கணக்குகளில் இது பயன்படாது. தொழில் நுட்பத் துறையிலும் அறிவியற் துறைகளிலும் மதிப்புகளை விரைவாகக் கணிப்பதில் இது பெருந்துணை புரிகின்றது. இதனைப் பயன்படுத்தி வர்க்கங்கள், வர்க்க மூலங்கள், முப்படிகள், முப்படி மூலங்கள், தலைகீழ் மதிப்புகள் ஆகியவைகளை மிக எளிதாகக் கணக்கிடலாம்: திரிகோண கணித சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க இயலும். அடியெண் (base) 10 க்கும் e க்கும் மடக்கையைக் காண்பது மிக எளிது. m நேர் அல்லது எதிரெண்ணாக இருக்கும்பொழுது a^m ன் $(a > 0)$ மதிப்பைக் கணக்கிட உபயோகிக்கலாம்.

நழுவுச் சட்டத்தில் மூன்று பகுதிகள் உள்ளன. அவைகளாவன :

1. நகரும் அளவுகோல் (நழுவுச் சட்டம்) (slide).
2. இரு நகரா அளவுகோல்கள் (Fixed scales-stock).
3. காட்டி (cursor).

இரு நகரா அளவுகோல்களுக்கிடையே ஒரு நகரும் கோல் முன்னும் பின்னும் நழுவிச் செல்லுமாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளது. நழுவிச்செல்லும் அளவுகோல் slide எனவும், நகரா அளவுகோல்கள் stock எனவும் அழைக்கப்படு கின்றன. இவ்வகையா அளவுச் சட்டங்களுக்குமேல், இரு புறங்களிலும் நகரும்படியான காட்டி ஒன்று உள்ளது. அதனை cursor என்று ஆங்கிலத்தில் அழைக்கின்றோம். தமிழில் 'காட்டி' எனக் குறிப்பிடுகின்றோம். அளவு கோல்களின் மேல் உள்ள அளவுகளைச் சரியாகப் படிக்க அல்லது மதிப்பிட, காட்டியின்மேல், நடுப்புறத்தில் ஒரு மெல்லிய மயிரிழை போன்ற கோடு உள்ளது. அதனை 'Hair line' என்று அழைப்பார்கள். இக் கருவி, எப்படி கணிதங்களைச் செய்ய நடைமுறையில் பயன்படுகின்றது என்பதனை இனிப்பார்ப் போம். எடுத்துக்காட்டுகளால் செய்முறை விளக்கப்பட் டுள்ளது.

1. பெருக்கல்:

இரண்டு எண்களைப் பெருக்க C, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவும். $a \times b$ ன் மதிப்பைக்காண D அளவு கோலில் உள்ள a ன் மேல், C அளவுகோலின் வலது அல்லது இடது குறியீடு (Index=1) பொருந்துமாறு நகர்த் தவும். பிறகு காட்டியை (cursor) C அளவுகோலில் உள்ள b க்கு நகர்த்து. D ல் அது காட்டுகின்ற மதிப்பே $a \times b$ ன் மதிப்பாகும்.

மடக்கை முறையில் தசம புள்ளியை வைக்கவும். மடக் கையின் முழுஎண் பாகம் தசம புள்ளியைக் குறிக்க உதவு கின்றது. இரண்டு எண்களைப் பெருக்கும்பொழுது நகரு கோல் (slide) இடப்புறத்தில் நீண்டிருக்குமானல் இவ்விரண்டு எண்களின் மடக்கைகளின் முழு எண் பாகங்களுடன் 1 ஐக் கூட்டி, தசம புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

(0) + (0) + (1) (LP) (1)

(1) $4{\cdot}2 \times 7{\cdot}85 = 32{\cdot}76$

(1) + (1) + ($\bar{2}$) + (1) (LP) (1)

(2) $42{\cdot}85 \times 21{\cdot}02 \times 0{\cdot}051 = 45{\cdot}05$

முதலில் எண்களின் மடக்கையின் முழு எண் பாகத்தை அவைகளின்மேல் எழுதிக் கூட்டவும். பிறகு நகருகோல்

இடப்புறத்தில் நீண்டிருக்கும்பொழுது 1 ஐக் கூட்டிக் கொள்ளவும். இடப்புறத்தில் நீண்டது என்பதனை L.P = Left Projection எனக் குறிக்கின்றோம்.

(2) 42·85 ஐ D யில் நிறுவி C யின் குறியீட்டை அதில் பொருத்தவும். காட்டியை C யில் 21·02 க்கு நகர்த்தவும். காட்டி D யில் காட்டும் மதிப்பு 42·85 × 21·02 ஆகும். இதனை மீண்டும் 0·051 ஆல் பெருக்க வேண்டியிருப்பதால், C யின் குறியீட்டை முதலில் கண்டுபிடித்த மதிப்புக்கு நகர்த்தி, காட்டியை C யில் 0·051 க்கு நகர்த்தி D யில் மதிப்பைக் காண்க

தசம புள்ளியை வைக்கும் முறையைப் பார்ப்போம். முதலில் 3 எண்களின் மடக்கையின் முழு எண் பாகங்களைக் கூட்டுக. (1) + (1) + $(\bar{2})$ = 0. பெருக்கும்பொழுது நகருகோல் ஒருமுறை இடப்பக்கம் நீண்டிருப்பதால் (L.P) 1 ஐக் கூட்டிக்கொள்கிறோம். மடக்கையின் முழு எண் பாகம் 1 ஆக இருப்பதால் பெருக்குத் தொகை 2 இலக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது. (= 45·08). இதே முறையை உபயோகித்து, தொடர்ந்து எத்தனை எண்களை வேண்டுமானாலும் பெருக்கலாம்.

2. வகுத்தல் :

இது முன்செய்த முறையின் எதிர்மார் முறையாகும். $\frac{a}{b}$ ன் மதிப்பைக் காண, தொகுதியினை (a) D யில் வைத்துப் பகுதியினை C யில் வைத்து, ஒன்றோடொன்று பொருந்துமாறு நகர்த்தவும். பிறகு காட்டியை C யின் குறியீடுக்கு நகர்த்தி, காட்டி D யில் காட்டும் மதிப்பைக் காண்க.

தசம புள்ளியைக் குறிக்க மடக்கை முறையினைப் பின்பற்றவும். இங்குத் தொகுதியின் மடக்கையின் முழு எண் பாகத்திலிருந்து பகுதியின் மடக்கையின் முழு எண்பாகத்தைக் கழிக்கவும். நகருகோல் இடதுபுறம் நீண்டிருக்கும்பொழுது மடக்கையின் முழு எண் பாகத்திலிருந்து 1 ஐக் கழிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

(1) − (1) (L.P)) = (0)

(1) $\frac{32·76}{7·1}$ = 4·2

(0)

$$(0) - (0) = (0)$$

$$(2)\quad \frac{6{\cdot}44}{1{\cdot}99} = 3{\cdot}99$$
$$(0)$$

இதில் 32·7 ஐ D ல் வைத்து, நகருகோலை நகர்த்தி C யின் 7·1 ஐ இதனுடன் பொருத்தவும். C யின் குறியீடு D யில் 4·2 ஐக் காட்டுகின்றது. நகருகோல் இடப்புறம் நீண்டுள்ளது.

(3) பெருக்கல் வகுத்தல் இணைப்பு முறை.

பல கணக்குகளில் பெருக்கலும் வகுத்தலும் இணைந்து வரும். அப்பொழுது மடக்கை முறையில் தசம புள்ளி வைக்கப்படுகின்றது. பெருக்கும் பொழுது நகருகோல் இடப் பக்கம் நீண்டால் (L.P) மடக்கையின் முழு எண் பாகத்துடன் 1–ஐக் கூட்டவும். வகுக்கும் பொழுது நீண்டால் 1-ஐக் கழிக்கவும்.

$$\frac{a \times b \times f}{d \times e} = \frac{a}{d} \times \frac{b}{e} \times f$$

என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எனவே D-யில் a-ஐ வைத்து C-யில் d-ஐ வைத்து ஒன்றோ டொன்று பொருந்துமாறு வை. பின்னர் காட்டியை C-யில் b-க்கு நகர்த்து. பிறகு காட்டியை நகர்த்தாமல், நகருகோலை நகர்த்தி C-யில் உள்ள e–யினைப் பொருத்து. பிறகு காட்டி யை C–யில் f–க்கு நகர்த்து. D-யில் காட்டுவதே தேவையான மதிப்பாகும்.

ஒவ்வொரு முறையும் நகருகோல் இடது புறம் நீண்டி ருக்குமானல் பெருக்கும்பொழுது 1–ஐக் கூட்டவும்; வகுக்கும் பொழுது 1-ஐக் கழிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$(0) + (0) - \bar{1} + 1 - 1 = (1)$$

$$\frac{1{\cdot}32 \times 5{\cdot}45}{0{\cdot}621} = 11{\cdot}58$$

வர்க்கமும் வர்க்க மூலங்களும்:

A×B, C×D அளவுகோல்களை உபயோகித்து வர்க்கங் களையும் வர்க்க மூலங்களையும் கணக்கிடலாம். A, B அளவு

கோல்களில் இரண்டு பகுதிகள் உள்ளன. அவ்விரண்டு பகுதிகளையும் தொடர்ச்சியாக 1 2 …… 9 10 20 …… 100 எனப் படிக்கவும். மீண்டும் அதையே திரும்ப முதலிலிருந்து 100 200 …… 900 1000 2000 …… 10000 எனப் படிக்கவும்.

D அளவுகோலில் ஒரு எண்ணின்மேல் காட்டியைப் பொருத்தினால் அந்த எண்ணின் வர்க்கத்தினை A அளவு கோலில் காட்டியானது காட்டும். அதேபோல் x-ஐ C-யில் வைத்து x^2-ஐ B-யில் அறியலாம்.

வர்க்க மூலத்தைக் காண இதற்கு நேர் மாறாகச் செய்ய வேண்டும். x-ஐ A அல்லது B-யில் பொருத்தி ($\sqrt{x}$-ஐ) வர்க்க மூலத்தை D அல்லது C-யில் பெறலாம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணின் மடக்கையின் முழு எண் பாகம் ஒற்றைப்படையில் இருந்தால் வர்க்கமூலம் காண அந்த எண்ணை வலப்புறப் பகுதியிலும், இரட்டைப் படையாக இருந்தால் இடப்புறப் பகுதியிலும் பொருத்தி வர்க்க மூலத்தை D-யில் (அல்லது C-யில்) காணவும்.

வர்க்க மூலம் காணும்பொழுது, இரண்டு இரண்டு இலக்கங்கள் வர்க்க மூலத்தில் ஒவ்வொரு இலக்கத்தினையும், இரண்டு இரண்டு தசம இடங்கள் வர்க்க மூலத்தில் ஒவ்வொரு தசம இடத்தையும் அளிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

(1) $8{\cdot}1^2 = 65{\cdot}5$. D-ல் 8·1-ன் மேல் காட்டியைப் பொருத்து. அது A-யில் 65·5-ஐக் கொடுக்கின்றது.

(2) $\sqrt{\overset{\times\times\,.\,\times}{1'21{\cdot}52}} = 11{\cdot}1$. 121·52-ன் மடக்கையின் முழு எண் பாகம் (2) இரட்டைப்படையாக இருப்பதால் அந்த எண்ணை A-யில் இடப்புறத்தில் பொருத்தி D-யில் 11·1 எனப் படிக்கின்றோம். அந்த எண்ணை இரண்டு இலக்கங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது இரண்டு கூறுகள் இருப்பதால் வர்க்க மூலத்தில் இரண்டு இலக்கங்கள் உள்ளன.

(3) $\sqrt{\overset{0\,0\,\times\,\times}{0{\cdot}00'05'20}} = 0{\cdot}02285$.

முப்படிகளும், முப்படி மூலங்களும்: (cubes and cube roots).

K, C அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி முப்படிகளையும் முப்படி மூலங்களையும் காண்கின்றோம். x-ஐ C-யில் எடுக்க,

x^3-ஐ K அளவுகோலில் படிக்கலாம். K அளவுகோலில் 3 பகுதிகள் உள்ளன. அதனை 1 2 ... 10 | 20 ... 100 | 200 ... 1000 எனவும் மீண்டும் முதலிலிருந்து

1000 2000......10,000/20,000......100,000/200,000......

எனவும் தொடர்ச்சியாகப் படிக்கவும்.

முப்படி மூலத்தைக்காண : x-ஐ சரியான பகுதியில் Kயில் வைத்தால் $x^{1/3}$ ஐ C–யில் படிக்கலாம். x–ல் ஒரு மூன்று இலக்கக் கூறு முப்படி மூலத்தில் ஒரு இலக்கத்தைக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

× × . ×

(1) $\sqrt[3]{156'70} = 53{\cdot}8$

(2) $\sqrt[3]{23'950} = 28{\cdot}82$

(3) $\sqrt[3]{2'395} = 13{\cdot}37$

(4) $\sqrt[3]{239{\cdot}5} = 6{\cdot}21$

$\sqrt[3]{23{\cdot}95} = 2{\cdot}88$

$\sqrt[3]{2{\cdot}395} = 1{\cdot}34$

$\sqrt[3]{0{\cdot}239'5} = 0{\cdot}621$

$\sqrt[3]{0{\cdot}023'95} = 0{\cdot}288$

$\sqrt[3]{0{\cdot}002395} = 0{\cdot}134$

$\sqrt[3]{0{\cdot}0002395} = 0{\cdot}0621$

$\sqrt[3]{0{\cdot}00002395} = 0{\cdot}0288$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்து தசம புள்ளிவைக்கும் முறை எளிதாக விளங்கும்.

மடக்கை அளவுகோல் :

ஒரு எண்ணின் மடக்கையின் தசமபாகத்தைக் காண (mantissa) C, L அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இங்கு அடியெண் (base) 10 ஆகும். எண்ணை C அளவு கோலில் காட்டியினுல் குறிக்க, L அளவுகோலில் மடக்கை

யின் தசம பாகத்தைப் பெறலாம். எதிர் மடக்கையினைக் காண (antilogarithm) தசம பாகத்தை L அளவுகோலில் எடுத்துக்கொண்டு, எண்ணை C அளவுகோலில் படிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

1. $\log_{10}2 = 0{\cdot}3010$

$\log_{10}68 = 1{\cdot}838$

$\log_{10}32{\cdot}5 = 1{\cdot}512$

$\log_{10}0{\cdot}07 = \bar{2}{\cdot}845$

antilog $2{\cdot}75 = 565{\cdot}0$

antilog $1{\cdot}521 = 33{\cdot}19$

antilog $\bar{2}{\cdot}395 = 0{\cdot}02483$

பித்தகோரஸ்ஸின் அளவுகோல்:

P அளவுகோலை உபயோகித்து $\sqrt{1 - x^2}$ ன் மதிப்பைக் காணலாம். x-ஐ D-யில் காட்டியினுல் குறிக்க $\sqrt{1-x^2}$ ன் மதிப்பை, காட்டி P அளவுகோலில் கொடுக்கின்றது. $\sqrt{a^2 - b^2}$ ன் மதிப்பைக் காண ($b < a$) P அளவுகோலைப் பயன் படுத்தலாம்.

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

b–ஐ D–யில் எடுத்துக்கொண்டு, C அளவுகோலில் a–ஐ இதனுடன் பொருத்து. பிறகு காட்டி P அளவுகோலில் $\sqrt{1-(b/a)^2}$ ன் மதிப்பைக் காட்டுகின்றது. இதனை a ஆல் பெருக்கி $\sqrt{a^2-b^2}$ ன் மதிப்பைப் பெறவும்.

தலைகீழ் அளவுகோல்: x கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $\frac{1}{x}$ ன் மதிப்பைக் காண C, CI அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்து கிறேம். x ஐ C யில் எடுத்துக் கொண்டால் காட்டி CI அளவு கோலில் $\frac{1}{x}$ ன் மதிப்பைக் காட்டுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

(1) $\frac{1}{5\cdot52} = 0\cdot181$

(2) $\frac{1}{8\cdot95} = 0\cdot117$

(3) $\frac{1}{0\cdot72} = 1\cdot389$

(4) $\frac{1}{0\cdot943} = 1\cdot060$

CF, DF அளவுகோல்களை உபயோகித்து ஒரு எண்ணை π ஆல் பெருக்கலாம். x ஐ D யில் எடுத்துக்கொண்டால் DF அளவுகோலில் $\pi \cdot x$-ன் மதிப்பைப் பெறலாம். அதே போல் x ஐ C ல் எடுத்துக் கொண்டால் CF ல் $\pi . x$ ன் மதிப்பைப் பெறலாம். வட்டத்தின் பரப்பு, சுற்றளவு முதலியவைகளைக் காண இவ்வளவைகோல்கள் மிகுதியாகப் பயன் படுகின்றன.

திரிகோண மிதி அளவுகோல்கள் :

கோணத்தின் மதிப்பு θ கொடுக்கப்பட்டால் $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\text{cosec}\,\theta$, $\cot\theta$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகளைக் காண திரிகோண மிதி அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்து கிறோம். முதலில் $\sin\theta$ ன் மதிப்பைக் காணும் முறையினைப் பார்ப்போம்.

Sin θ :

($0 \leq \theta \leq 0\cdot574°$). θ 0க்கும் $0\cdot574°$ க்குமிடையே யிருக்கும் பொழுது ஆரயனளவான (Radian measure) $\sin\theta°$ ன் மதிப்புக்குச் சமம். எனவே $\sin\theta$ ன் மதிப்பைக் காண $\theta°$ ஐ 57·28 ஆல் வகுக்கவும் $\sin\theta° = \frac{\theta°}{57\cdot28}$; $\frac{x'}{57\cdot28\times60} = \sin x'$.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

1. $\sin 0\cdot5° = \frac{0\cdot5}{57\cdot28} = 0\cdot0087$

2. $\sin 12' = \frac{12}{57\cdot28\times60} = 0\cdot0035$

3. $\sin 0° 26' 30'' = \frac{26 \cdot 50}{57 \cdot 28 \times 60} = 0 \cdot 0071$

2. $(0 \cdot 574° \leq \theta \leq 5 \cdot 74°)$.

θ, 0·574° க்கும் 5·74° க்குமிடையே இருக்கும்பொழுது, ST, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

θ° ஐ ST யில் எடுத்துக்கொண்டால், sin θ° ன் மதிப்பினை D யில் பெறலாம். sin θ° ன் மதிப்பு தசம எண்ணாக இருக்கும். 0·1 க்கும் 0·01 க்குமிடையே யிருக்கும். இத்தசம எண்ணில் எண்ணுக்கும் தசம புள்ளிக்கும் இடையே ஒரு 0 இருக்கும். அதாவது

sin θ° = 0·0 XX …… ஆக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\sin 3 \cdot 5° = 0 \cdot 061$

$\sin 1° . 42' = 0 \cdot 0297$

$\sin 4° . 18' = 0 \cdot 0750$

3. $5 \cdot 74° \leq \theta \leq 90°$.

θ°, 5·74 க்கும் 90 க்குமிடையே யிருக்கும்பொழுது S, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துகின்றோம். θ ஐ S அளவுகோலில் எடுத்துக்கொள்ள D யில் sin θ ன் மதிப்பைப் பெறலாம். sin θ ன் மதிப்பு 0·1 க்கும் 1·0 க்குமிடையே இருக்கும். அளவுகோலில் கணக்கிட்ட எண்ணின் முதலில் தசம புள்ளியை வைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\sin 45° = 0 \cdot 7071$

$\sin 72° = 0 \cdot 951$

$\sin 32° = 0 \cdot 529$

$\cos \theta : \; 0° \leq \theta \leq 87 \cdot 4°$

θ, 0 க்கும் 87·4° க்குமிடையே யிருக்கும்பொழுது CS, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி cos θ° ன் மதிப்பைப் பெறுகின்றோம். θ ஐ CS ல் எடுக்க cos θ° ன் மதிப்பினை D யில்

படிக்கலாம். இதன் மதிப்பு 0·1 க்கும் 1·0 க்குமிடையே யிருக்கும். அதாவது D ல் காட்டப்பட்ட மதிப்புக்கு முன்னால் தசம புள்ளியை வைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 10:

(1) $\cos 36^\circ = 0{\cdot}809$

(2) $\cos 82^\circ = 0{\cdot}139$

(3) $\cos 7^\circ = 0{\cdot}992$

$(84{\cdot}7^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$. θ, 84·7 க்கும் 90 க்குமிடையே யிருக்கும் பொழுது நிரப்புக் கோணத்தின் sin மதிப்பைக் காணவும்.

$$\cos\theta = \sin(90-\theta)$$

$$\cos 88^\circ = \sin 2^\circ = 0{\cdot}0349$$

$$\cos 89^\circ = \sin 1^\circ = 0{\cdot}017$$

tangent θ:

1. $0^\circ \leq \theta \leq 5{\cdot}74^\circ$. θ, 0க்கும் 5·74°க்குமிடையே யிருக்கும் பொழுது $\tan\theta' = \sin\theta'$ ஆக உள்ளது. எனவே $\theta < 0{\cdot}574^\circ$ ஆக இருக்கும்பொழுது ஆரயனளவைக் கணக்கிடவேண்டும். $\theta < 5{\cdot}74^\circ$ ஆக இருக்கும்பொழுது ST, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவும்.

2. $5{\cdot}74^\circ \leq \theta \leq 45$. θ இந்த இடைவெளியிலிருந்தால் T, D அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவும். θ ஐ T யில் பொருத்த D யில் $\tan\theta^\circ$ ன் மதிப்பைப் பெறலாம். அளவுகோலில் கண்ட எண்ணுக்கு முதலில் தசம புள்ளியைக் குறிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$\tan 0{\cdot}5^\circ = 0{\cdot}0087$

$\tan 0^\circ 12' = 0{\cdot}0035$

$\tan 3^\circ 36' = 0{\cdot}0629$

$\tan 32^\circ = 0{\cdot}625$

$\tan 23^\circ = 0{\cdot}424$

3. $(45^\circ \leq \theta \leq 84{\cdot}26^\circ)$. θ இந்த இடைவெளியில் இருக்கும் பொழுது T, CI அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

முதலில் நிரப்புக் கோணத்தைக் கண்டு, அதனை T யில் குறித்து மறுபுறம் CI அளவுகோலில் tan $\theta°$ ன் மதிப்பைப் பெறவும். இதன் மதிப்பு 1 க்கும் 10 க்குமிடையே யிருக்கும். அதாவது CI அளவுகோலில் கணக்கிட்ட எண்ணின் முதல் இலக்கத்துக்கு அடுத்து தசம புள்ளியை வைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

1. $\tan 4{\cdot}5° = 0{\cdot}0785$
2. $\tan 62° = 1{\cdot}88$
3. $\tan 68° = 2{\cdot}475$

tan θ-ன் மதிப்பு கொடுக்கப் பட்டிருந்தால், θ ஐக் காண மேலே செய்த முறையினை நேர்மாறாகச் செய்யவும்.

$$\tan \theta = 4{\cdot}5. \quad \theta = ?$$

4·5 ஐ CI அளவுகோலில் வைத்து θ ன் மதிப்பினை CT யில் படிக்கவும்.

(Log Log Scales :) LL. அளவுகோல்கள்.

LL_1 LL_2 LL_3 அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு எண்ணின் அடுக்குகளைக் காணலாம். LL_1 அளவுகோல் 1·01 லிருந்து 1·11 வரையும், LL_2, 1·1 யிலிருந்து 3·0 வரையும், LL_3 2·5 யிலிருந்து 50,000 வரையும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இவைகளில் காட்டப்பட்டுள்ள எண்களின் தலைகீழ் மதிப்புகள் LL_0 அளவுகோல்களில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

a^b ன் மதிப்பைக் காண, a ஐ LL அளவுகோலில் எடுத்து C யின் குறியீடு, இதனுடன் பொருந்துமாறு செய்யவும். பிறகு C யில் b க்குக் காட்டியை நகர்த்து. LL அளவுகோல் a^b ன் மதிப்பைக் கொடுக்கின்றது. a^{-b} ன் மதிப்பினை LL_0 அளவுகோலில் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

1. $3{\cdot}53^4 = 15{\cdot}2$
2. $12{\cdot}2^{2{\cdot}5} = 528$
3. $4{\cdot}5^{-2{\cdot}1} = 0{\cdot}0428$

4. $x^{3\cdot5} = 54$ ஆனல் $x = 3\cdot12$

5. $1\cdot4^x = 5\cdot96$ ஆனல் $x = 5\cdot3$ ஆகும்.

சமன்பாடுகளின் தீர்வு :

சமன்பாடுகளைப் பட்டறிதல் முறையில் மூலங்களைக் கணக்கிடும் பொழுது, நழுவுச் சட்டத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். எண்ணியல் முறையில் மூலங்களைக் காணும் கணித்தலில் இதனைப் பயன்படுத்தி எளிமை ஆக்கலாம்.

நேம வரையம் : Nomography

புள்ளியியலில் வரைபடங்கள் மூலம் விவரங்களை எளிதாக விளங்க இயலுகின்றது. ஒவ்வொரு அட்டவணைக்கும் ஒரு படத்தை வரைந்து அதன் மூலம் புள்ளி விவரத்தை அறிந்து கொள்ளவேண்டியுள்ளது. ஆனல் நேம வரையம் என்பது இதற்குச் சற்று மாறுபட்டது. ஒரே இன பல்வேறு சமன் பாடுகளைத் தீர்க்க ஒரே படத்தைப் பயன்படுத்துவதாகும். இது ஒரு தனித்தன்மையுடைய வரைபட கணித்தல் முறையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக

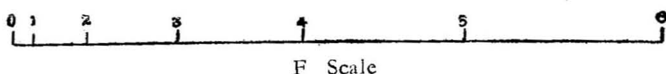
$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் பொது இருபடிச் சமன் பாட்டுக்கு நேம வரையம் அமைத்தால், அதனை உபயோகித்து எந்த இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கும் மூலங்களைக் காணலாம். இதுபோலவே $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ என்னும் சமன் பாட்டுக்கு நேம வரையம் அமைத்தால் அதனை உபயோகித்துப் பல்வேறு ஆரங்களுடைய கோளங்களின் கன அளவுகளைக்காணலாம். மேலும் பல்வேறு கன அளவுகளையுடைய கோளங்களின் ஆரங்களை இப்படத்திலிருந்தே கணக்கிடலாம். எனவே ஒவ்வொரு தடவையும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுக் கணக்கிட வேண்டியதில்லை.

நேம வரையத்தில் வரைபட அளவையைக் (Graphical scale) கருதாமல் சார்பளவினையை (functional scale) உபயோகப் படுத்துகின்றோம். வரைபட அளவை யென்பது, எண்களின் மதிப்புக்குத் தகுந்தாற்போல் சம அல்லது அசம இடைவெளியில் வரிசையாகக் குறிப்பதாகும். ஆனல் சார் பளவை கோலில், சார்புகளின் மதிப்புகள் இருக்கவேண்டிய இடங்களில் மாறியின் மதிப்புகளிருக்கும். ஒரு சார்புக்கு சார்பளவையைக் குறிக்க முதலில் சார்பின் மதிப்புகள் கணக்

கிடப் பெறுகின்றன. அந்த இடங்களில் மாறியின் மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக $y = x^2$ என்னும் சார்புக்கு, சார்பளவை கோலை அமைக்கும் முறையினைப் பார்ப்போம்.

முதலில் மாறியின் வரம்புக்குள் $(0 \leq x \leq 6)$ சார்பின் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்துகின்றோம்.

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36
$Y = m_x . x^2$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	6



F Scale

$y = x^2$ functional scale.
படம் 10

ஆரம்ப புள்ளியை 0 எனக் குறிக்கின்றோம். பிறகு 1 அலகு எடுத்து அங்கு 1 என எழுதவும். ஆரம்பத்திலிருந்து 4 அலகுகளை எடுத்து அந்த இடத்தில் (4 எனக் குறிக்காமல்) 2 எனவும் 9 ஆவது அலகில் 3 எனவும் குறிக்கவேண்டும். இப்படி சார்பின் மதிப்புகளை உபயோகித்து மாறிகளின் மதிப்புகள் குறிக்கப்பட்டுள்ள அளவுகோலைச் சார்பளவை கோல் எனக் கூறுகின்றோம்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் மாறியின் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது சார்பின் மதிப்பு மிகமிக அதிகமாகின்றது. அப்பொழுது இந்த மதிப்புகளைக் குறிக்கப் பெரிய வரைதாள் வேண்டியுள்ளது. எனவே சிறிய வரைதாளில் பெரிய மதிப்புகளைக் குறிக்க இச்சார்பின் மதிப்புகளை ஒரு எண்ணால் பெருக்கி, சிறியதாக்குகிறோம்.

இந்த எண்ணை, அளவையெண் (scale modulus) எனக் கூறுகின்றோம். வரைபடத்தின் நீளத்தை அல்லது அளவுகோலின் நீளத்தைச் சார்பின் அதிகப்படியான மதிப்பிற்கும்

குறைந்த மதிப்பிற்கு மிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தால் வகுத்து இவ்வளவை யெண்ணைப் பெறுகின்றோம்.

$$\therefore \text{ அளவை யெண் } = \frac{\text{அளவுகோலின் நீளம்}}{\text{சார்பின் அதிகப்படியான மதிப்பு} - \text{சார்பின் குறைந்த மதிப்பு}}$$

அளவை யெண்ணை m எனக் குறிக்கின்றோம்.

சார்பின் மதிப்புகளை அளவை யெண்ணால் பெருக்கி, அவைகளை வரைதாளில் பயன்படுத்துகின்றோம். இப் பெருக்குத் தொகையை அளவைச் சமன்பாடு [scale equation $= m \times f(x)$] என அழைக்கின்றோம். இவ்வளவைச் சமன்பாடுகளிருக்குமிடத்தில் மாறியின் மதிப்புகள் குறிக்கப் பட்டிருக்கும். படத்தில் 0 லிருந்து $\frac{1''}{6}$ எடுத்து அந்த இடத்தில் 1 எனவும், $\frac{4''}{6}$ எடுத்து 2 எனவும், $\frac{9''}{6}$ எடுத்து 3 எனவும், $\frac{16''}{6}$ எடுத்து 4 எனவும், $\frac{25''}{6}$ எடுத்து 5 எனவும் 6 ஆவது அங்குலத்தில் 6 எனவும் குறிக்கின்றோம். எனவே அளவைச் சமன்பாட்டை உபயோகித்து மாறியின் மதிப்புகளைக் குறிப்பதனைச் சார்பளவை கோல் எனக் கூறுகின்றோம்.

நேம வரையத்தை உபயோகித்து $y_1(x_1) = y_2(x_2)$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கலாம். இம்மாதிரி சமன்பாடுகளுக்கு இரண்டு முறையாக நேம வரையத்தை அமைக்கலாம்.

1. அடுத்துள்ள அளவுகோல்.
2. அடுத்தல்லா அளவுகோல்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு நேம வரையம் அமைத்தால் இந்த ஒரே படத்திலிருந்து C யின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குச் சரியான F ன் மதிப்புகளையும், பல்வேறு F ன் மதிப்புகளுக்கு C ன் மதிப்புகளையும் கணிக்கலாம். எனவே F லிருந்து Cக்கு மாற, Cயிலிருந்து Fக்கு மாறச் சமன்பாட்டைப் பயன் படுத்தத் தேவையில்லை.

இச் சமன்பாட்டில் C க்கு ஒரு சார்பளவு கோலை அமைத்து அதன் மறுபக்கத்தில் F ன் சார்பளவு கோலை அமைத்தல் வேண்டும். இதற்கு 'அடுத்துள்ள அளவுகோல் (Adjacent scale) என்று பெயர். அளவுகோலில் ஒரு புறத்தில் y_1 (x_1) என்னும் சார்பளவையினையும், மற்ற பக்கத்தில் y_2 (x_2) என்னும் சார்பளவு கோலையும் அமைக்கின்றோம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$$C = \frac{5}{9}(F-32) \quad (0 \leq C \leq 100)$$

என எழுதலாம். ஆறு அங்குல வரைதாளில் $y = C$ என்னும் சார்பளவு கோலை அமைக்கவும். அடுத்த பக்கத்தில் $y = \frac{5}{9}(F-32)$ என்னும் சார்பளவு கோலை அமைக்கவும். முதலில் C க்கு அளவெண்ணைக் கணக்கிடுகிறோம்.

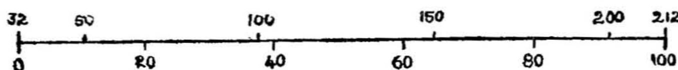
$$m_c = \frac{6}{100-0} = 0{\cdot}06 = mF$$

சார்பினை அட்டவணைப்படுத்தவும்.

C	0	20	40	60	80	100
$X_c = m_c \,.\, C$	0	1·2	2·4	3·6	4·8	6·0

F க்கும் அதே அளவெண்ணைக் கொண்டு அட்டவணைப் படுத்தவும். C=0 ஆக இருக்கும்பொழுது F=32 ஆகவும், C=100 ஆக இருக்கும் பொழுது F=212 ஆகவும் உள்ளது. 32 க்கும் 212 க்கு மிடையில் சில குறிப்பிட்ட இடங்களில் அளவைச் சமன்பாட்டைக் கணக்கிட்டு C அளவுகோலின் மறுபுறத்தில் F ஐக் குறிக்க வேண்டும்.

F	32	50	100	150	200	212
$XF = mF\,\frac{5}{9}(F-32)$	0	0·59	2·25	3·93	5·59	5·99



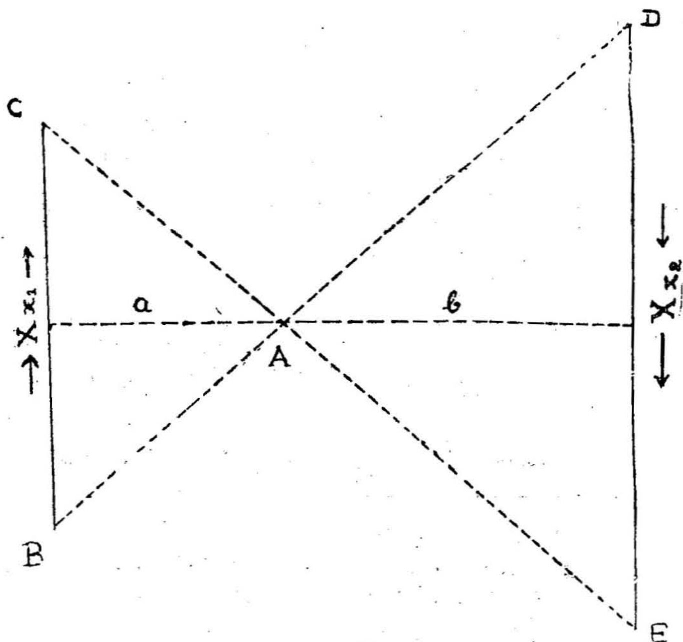
C Scale

படம் 11

ஒரு குறிப்பிட்ட C ன் மதிப்புக்குச் சமமான F ன் மதிப்பைக் காண இதனை உபயோகிக்கலாம். F க்குச் சமமான C ன் மதிப்பையும் காணலாம்.

அடுத்தல்லாத அளவைகோல் (Non adjacent scale)

இதில் இரு சார்புகளுக்கும் தனித்தனியாக இணையான இரு அளவை கோல்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. ஒரு சார் பளவை C க்கும் மற்றது இதற்கு இணையாக $\frac{5}{9}(F-32)$ க்கும் சார்பளவை கோல்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. இந்த இரு அளவைகோல்களும் ஒரே அளவு நீளத்தில் இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை. இரண்டுக்கும் வெவ்வேறு அளவெண்களிருக்கலாம். இரண்டு அளவுகோல்களும் எதிர் எதிர் திசையில் குறிக்கப்படுகின்றன. $y_1(x_1) = y_2(x_2)$ க்குக் கீழ்க் கண்டவாறு படம் வரைகிறோம்.



படம் 12

படத்தில் △ABC, △ADE இரண்டும் உருவொத்த முக்கோணங்கள். எனவே

$$\frac{BC}{ED} = \frac{BA}{AD} = \frac{MA}{AN} \text{ ஆகும். ஆனல்}$$

$$BC = mx_1 \,.\, y_1 (x_1)$$

$$ED = mx_2\, y_2 (x_2)$$

$\therefore \quad y_1 (x_1) = y_2 (x_2)$ (கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடாகும்)

$$\therefore \quad \frac{BC}{ED} = \frac{mx_1}{mx_2} = \frac{a}{b}$$

எனவே A என்னும் புள்ளி மூலே விட்டம் BD ஐ BA : AD = $a : b$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டுகின்றது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில்

$$C = \frac{5}{9} (F - 32), \; 0 \leq C \leq 100°.$$

முதலில் $y = C$ என்னும் சார்பளவுகோலே அமைக்கின்ரேம். C அளவுகோலின் நீளம் 6″ ஆக எடுத்துக் கொண்டால் $m_c = \dfrac{6}{100 - 0} = 0{\cdot}06$ ஆகும். எனவே அளவைச் சமன்பாட்டை அமைக்கின்ரேம்.

C	0	20	40	60	80	100
$X_c = m_c \times C$	0	1·2	2·4	3·6	4·8	6·00

இவ்வளவைச் சமன்பாட்டை உபயோகித்து C யின் மதிப்புகளேக் குறிக்கின்ரேம்.

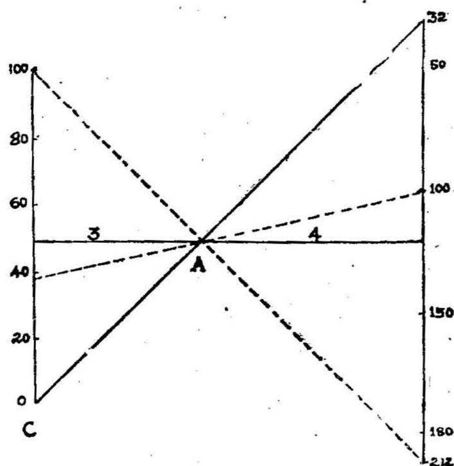
அடுத்து F க்கு சார்பளவுகோலே அமைப்போம். F அளவுகோலின் நீளம் 8″ ஆக எடுத்துக்கொண்டால்

$$mF = \frac{8}{212 - 32} = \frac{8}{180}$$

எனவே சார்பினை அட்டவணைப்படுத்துகின்றோம்.

F	32	50	100	150	200	212
$XF = \frac{8}{180} \cdot \frac{5}{9}(F-32)$	0	0·80	3·02	5·24	7·46	8·0

இப்பொழுது F க்கும் C க்கும் தனித்தனியாக இணையான இரண்டு அளவுகோல்களை அமைக்கவும். இரண்டும் எதிர் எதிர் திசையில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. பிறகு C யில் O வும், F ல் 32 ம் இணைக்கப்பட்டு CA = 3 அலகாகவும் மீதி 4 அலகாகவும் பிரித்து A யினைக் குறிக்கின்றோம். C யிலிருந்து F ன்



படம் 13

மதிப்பைக்காண A வழியாக ஒரு கோட்டை வரையவும். F ல் எந்த இடத்தில் வெட்டுகின்றதோ அதே C க்குச் சமமான F ன் மதிப்பாகும்.

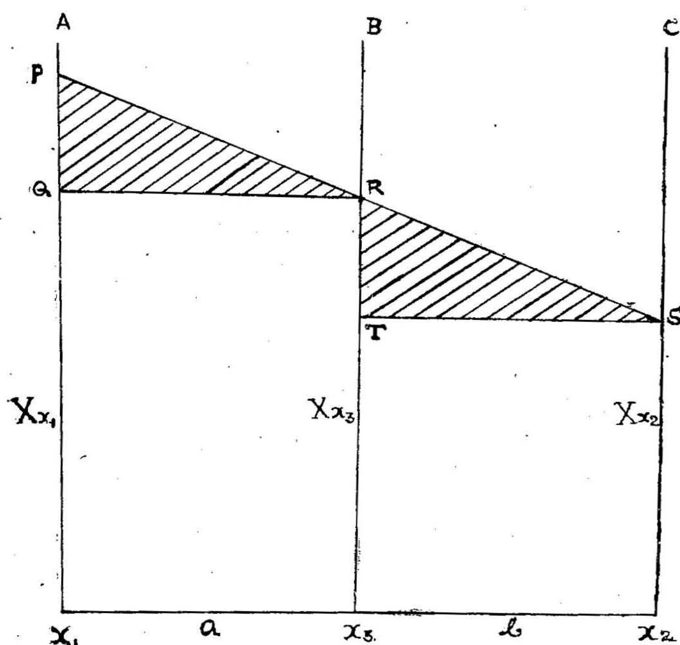
$$y_1(x_1) + y_2(x_2) = y_3(x_3)$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுக்கு நேம வரையம் அமைக்கும் முறையைப் பார்ப்போம். இதனை Alignment chart என்று அழைக்கின்றோம்,

இங்கு,

$$X_{x1} = m_{x1}\, y_1\, (x_1)$$
$$X_{x2} = m_{x2}\, y_2\, (x_2)$$
$$X_{x3} = m_{x3}\, y_3\, (x_3)$$

என்னும் மூன்று இணையான சார்பளவு கோல்களை வரைகின்ளேம். mx_1 என்பது முதல் சார்பின் அளவெண்ணாகும். mx_2 இரண்டாம் சார்பின் அளவெண்ணாகும். m_{x3} என்பது மூன்ரும் சார்பின் அளவெண்ணாகும். மூன்று சார்பு அளவுகோல்களும் ஒரே திசையில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 14

மேலே வரையப்பட்டுள்ள படத்தில் B அளவுகோலின் இடத்தைக் கணக்கிடவேண்டும். படத்தில் △PQR, △RST இரண்டும் உருவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{PQ}{RT} = \frac{a}{b} = \frac{X_{x1} - X_{x2}}{X_{x3} - X_{x2}}$$

$$i.e., \quad X_{x1}\, b + X_{x2} \cdot a = X_{x2}(a+b)$$

$$i.e., \quad \frac{X_{x1}}{a} + \frac{X_{x2}}{b} = \frac{X_{x3}}{ab/(a+b)}$$

ஆனல் $X_{x1} = m_{x1}\, y_1(x_1)$

$X_{x2} = m_{x2}\, y_2(x_2)$

$X_{x3} = m_{x3}\, y_3(x_3)$ ஆகும்.

இவைகளை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிடவும்.

$$\therefore \quad \frac{m_{x1} \cdot y_1(x_1)}{a} + \frac{m_{x2} \cdot y_2(x_2)}{b} = \frac{m_{x3} \cdot y_3\ (x_3}{ab/a+b}$$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{m_{x1}}{m_{x2}}$ ஆனல்

$m_{x3} = \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{m_{x1} \cdot m_{x2}}{m_{x1}+m_{x2}}$ ஆக இருந்தால்

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$y_1(x_1) + y_2(x_2) = y_3(x_3)$$

அடைகிறோம். எனவே x_3 அளவுகோல் x_1-க்கும் x_2-க்கு மிடையே m_{x1}, m_{x2} என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது. x_3 அளவுகோலின் அளவெண்ணுவது

$m_{x3} = \dfrac{m_{x1} \times m_{x2}}{m_{x1}+m_{x2}}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கவும்.

$$S = 2\sqrt{x} + 3y \qquad 0{\cdot}1 \leq x \leq 1{\cdot}0$$

$$1{\cdot}0 \leq y \leq 2{\cdot}0$$

இவ் வளவுகோல்களின் நீளம் $6''$ ஆக எடுத்துக்கொள்வோம். x–ன் அளவெண்ணுவது :

$$m_x = \frac{6}{(2\times\sqrt{1} - 2\sqrt{0{\cdot}1})} = 4{\cdot}39$$

y-ன் அளவெண்ணுவது

$$m_y = \frac{6}{(3 \times 2 - 3 \times 1)} = 2$$

$$\therefore \quad m_s = \frac{m_x \,.\, m_y}{m_x + m_y} = \frac{4{\cdot}39 \times 2}{4{\cdot}39 + 2} = 1{\cdot}375$$

S அளவுகோல் x-க்கும் y-க்கும் நடுவே $\frac{m_x}{m_y} = \frac{a}{b} = \frac{43{\cdot}9}{2}$ என்னும் விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது.

மூன்று அளவைச் சமன்பாடுகளாவன :

1. $X_x = m_x \,.\, y_1\,(x_1)$
$= 4{\cdot}39 \times 2\,(\sqrt{x} - \sqrt{0{\cdot}1}) = 8{\cdot}78\,(\sqrt{x} - 0{\cdot}316)$
$X_y = m_y \,.\, y\,(y)$
$= 2\,(3y - 3)$
$X_s = m_s \,.\, (S - 3{\cdot}632)$
$= 1{\cdot}375\,(S - 3{\cdot}632)$

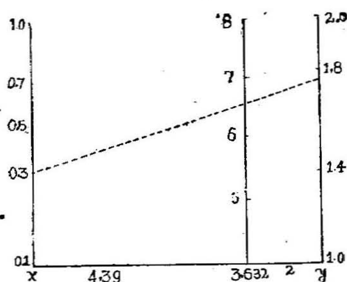
இவைகளைத் தனித்தனியே அட்டவணைப்படுத்தவும்.

X	0·1	0·3	0·5	0·7	1·0
X_x	0	2·14	3·45	4·56	6·00

Y	1	1·4	1·8	2·0
X_y	0	2·4	4·8	6·0

S	3·632	5	6	7	8
X_s	0	1·88	3·26	4·64	6·04

x-க்கும் y-க்கும் குறைந்த மதிப்பினைக் கொடுக்கப் பட்டுள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட S-ன் குறைந்த மதிப்பு (3·632)-ம் அதிக மதிப்புகளையிட அதிக மதிப்பு 8-ம் கிடைக்கின்றது. அளவைச் சமன்பாடுகளை உபயோகித்து மாறிகளின் மதிப்புகள் குறிக்கப்பட்டு, கீழே நேம வரையம் அமைக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 15

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $y_1(x_1) - y_2(x_2) = y_3(x_3)$ என்ற அமைப்பிலிருந்தால் மேலே குறிப்பிட்ட முறையில் நேமவரையம் அமைக்கின்றோம். ஆனால் $y_2(x_2)$-ன் அளவு கோல் எதிர் திசையில் அதாவது மேலிருந்து கீழாகக் குறிக்கப் படவேண்டும். x_2-ன் அளவைச் சமன்பாடானது

$$X_{x2} = m_{x2}\,[-\,y_2(x_2)\,]$$ என்பதாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $y_1(x_1) \cdot y_2(x_2) = y_3(x_3)$ என்ற அமைப்பிலிருந்தால் மடக்கை எடுப்பதின் மூலம் மேலே கொடுக்கப்பட்ட அமைப்புக்கு மாற்றலாம்.

$$\log y_1(x_1) + \log y_2(x_2) = \log y_3(x_3).$$

இம் மாதிரி சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறையினைப் பார்த்தோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$q = 3{\cdot}33\,b\,H^{3/2}$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு நேம வரையம் அமைக்கவும்.

$$(3' \leq b \leq 20')$$
$$(0{\cdot}5' \leq \mathrm{H} \leq 1{\cdot}5)$$

மடக்கை யெடுக்கவும். அப்பொழுது

$$\log q - \log 3{\cdot}33 = \log b + \tfrac{3}{2} \log \mathrm{H}$$

இது $y_3(x_3) = y_1(x_1) + y_2(x_2)$ என்னும் அமைப்பில் உள்ளது. இப்பொழுது, அளவுகோல்களின் நீளங்கள் 6′′ என எடுத்துக் கொண்டு அளவெண்களைக் கணிக்கின்றோம்.

$$m_b = \frac{6}{\log 20 - \log 3} = 7{\cdot}285$$

$$m_{\mathrm{H}} = \frac{6}{(\frac{3}{2} \log 1{\cdot}5 - \frac{3}{2} \log 0{\cdot}5)} = 8.385$$

$$m_{\mathrm{Q}} = \frac{(7{\cdot}285)\,(8{\cdot}385)}{(7{\cdot}285 + 8{\cdot}385)} = 3{\cdot}898$$

இப்பொழுது அளவைச் சமன்பாடுகளைக் காணவும்.

$$\mathrm{X}_b = 7{\cdot}285\ (\log b - \log 3)$$
$$\mathrm{X}_{\mathrm{H}} = 8{\cdot}385\ (\log \mathrm{H} - \log 0{\cdot}5)$$
$$\mathrm{X}_{\mathrm{Q}} = 3{\cdot}898\ (\log \mathrm{Q} - \log 3{\cdot}33)$$

இவ்வளவைச் சமன்பாடுகளை அட்டவணைப்படுத்தி அவைகளைக் குறித்து நேம வரையத்தைப் பெறலாம்.

மாதிரி :

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு நேம வரையம் (Nomogram) வரைக.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

அல்லது $x^2 + bx + c = 0$

என எழுதலாம்.

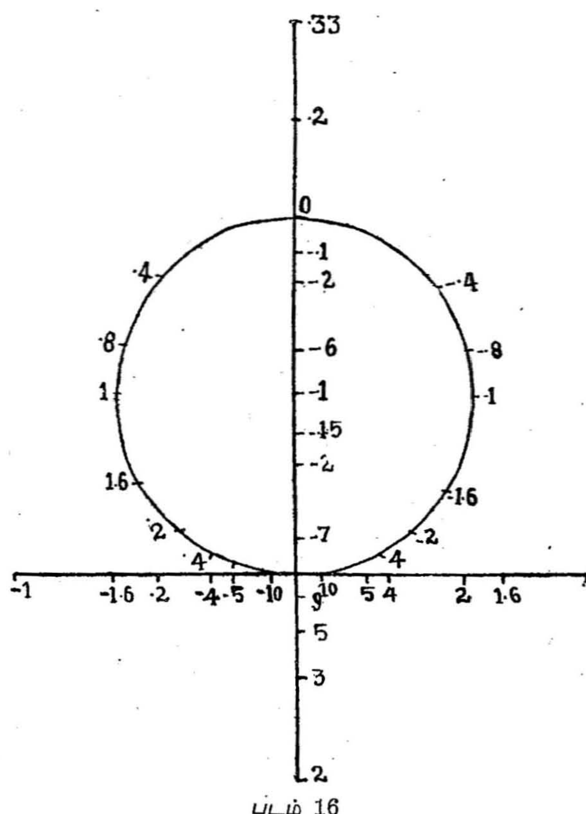
ஒரு வரைபடத் தாளில் x, y அச்சுகளை வரைக. x-அச்சை ஆரம்பத்தில் (origin) தொடுமாறும் y-அச்சின் நேர் பக்கத்தில் (+ve side) இருக்குமாறும் ஆரம், $r = 2$ செ. மீ. உள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைக. வட்டத்தின் மையம் y-அச்சின் மேல் உள்ளது.

x-அச்சில் ஆரம்பத்திலிருந்து (from the origin) $\frac{d}{b}$ என்ற தூரங்களில் b-ன் மதிப்புகள் குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு $d = 2r$ என்பது விட்டமாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக $b = 1, 5, 10$ என்ற மதிப்புகளை x-அச்சில் ஆரம்பத்திலிருந்து 4 செ. மீ., $\frac{4}{5}$ செ.மீ., $\frac{4}{10}$ செ.மீ. தூரங்களில் குறிக்கிறோம்.

c யின் மதிப்புகளை y-அச்சில் ஆரம்பத்திலிருந்து $\frac{d}{(1-c)}$ என்ற தூரங்களில் குறிக்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக $c = 0, -1, 2$ என்ற மதிப்புகளை y-அச்சில் ஆரம்பத்திலிருந்து 4 செ.மீ., $\frac{4}{1-(-1)} = 2$ செ. மீ., $\frac{4}{1-2} = -4$ செ. மீ. தூரங்களில் குறிக்கிறோம்.

b-ன் மதிப்புகளை x-அச்சில் குறித்துள்ளோம். இப்போது $(-b)$ யின் மதிப்புகளை வட்டத்தின்மேல் குறிப்போம். x-அச்சில் உள்ள b யின் மதிப்பையும் வட்டத்தின்மேல் உள்ள 0, பூச்சியத்தையும் சேர்க்கும்போது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியில் $(-b)$ யினை மதிப்பைக் குறிக்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக x-அச்சில் 4 ஐயும் வட்டத்தின்மேல் உள்ள 0 ஐயும் சேர்க்கும்போது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியில் (-4) என்று குறிக்கிறோம். இதுபோலவே வட்டத்தின் இடது புறத்தில் உள்ள 2 என்ற புள்ளி, x-அச்சின் -2 ஐயும் வட்டத்தின் மேல் உள்ள 0 ஐயும் சேர்க்கும் போது கிடைத்த புள்ளியாகும்.



படம் 16

இதில் கீழ்வருவன குறிப்பிடத் தக்கவையாம்.

1. *b* யும் *c* யும் வெறும் எண்கள்.

2. *c* யின் குறி நேர் என்றால் (+ve) அதன் மதிப்பு *y*–அச்சின் எதிர்பக்கத்தில் (–ve side) குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இது போலவே *c*–யின் குறி எதிர் (–ve) என்றால் அதன் மதிப்பு *y*-அச்சின் நேர் பக்கத்தில் (+ve side) குறிக்கப் பட்டுள்ளது.

3. *b*–யின் மதிப்புகள் *x*–அச்சிலும், *c*-யின் மதிப்புகள் *y*–அச்சிலும் *b*–யின் மதிப்புகள் வட்டத்தின் மேலும் குறிக் கப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு வரையப்பட்ட வரைபடம் தான் நமக்குத் தேவையான $x^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குரிய நேம வரையம் (nomogram) ஆகும்.

பயன்

இந்த ஒரே நேம வரையத்தைக் கொண்டு b, c என்பவற்றின் வேறுபட்ட மதிப்புகளுக்குரிய எல்லா இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக $x^2 + x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க x–அச்சின் $+1$ஐயும் y-அச்சின் -2ஐயும் சேர்த்து நீட்டினல் வட்டத்தில் $+1$ கிடைக்கிறது. இது ஒரு மூலம் ஆகும். மற்ெருரு மூலம் $x = -2$.

மாதிரி

x–ஆல் ஆன y-யின்

$y = \dfrac{\sum xy}{\sum x^2} \cdot x$ என்ற தொடர்புள்ள சமன்பாட்டிற்கு (Regression equation) நேம வரையம் (nomogram) வரைக.

இங்கு $x = 0$ விருந்து 20 வரை

$y = 0$ விருந்து 25 வரை

$\sum xy = 0$ விருந்து 1500 வரை

$\sum x^2 = 0$ விருந்து 1500 வரை

படத்தில் $x = 10$, $\sum xy = 1000$, $\sum x^2 = 500$ என்ருல் y–யின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{y}{x} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இது

$$\frac{u}{v} = \frac{w}{z}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

இதன் அளவைச் சமன்பாடுகள் (scale equations) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$X_u = m_u\, u$$

$$X_v = m_v\, v$$

$$X_w = m_w\, w$$

$$X_z = m_z\, z$$

m_u, m_v, m_w, m_z என்ற அளவையெண்களை (scale modulli) கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{m_u}{m_v} = \frac{m_w}{m_z}$$

ஆகவே இவற்றில் ஏதாவது மூன்று அளவையெண்கள் தெரிந்தால் நான்காவது தானாகவே கிடைக்கும்.

அளவை (scale) யின் நீளம் 5 செ.மீ. எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad m_w = \frac{5}{1500} = \frac{1}{300}$$

இதுபோலவே $m_u = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$. $m_v = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

ஆகவே $m_z = m_w \times \frac{m_v}{m_u} = \frac{1}{300} \times \frac{5}{5} = \frac{1}{300}$

அளவைச் சமன்பாடுகள் (scale equations)

$$X_y = m_u\, y = \frac{1}{5}\, y, \; X_x = m_v\, X = \frac{1}{5}\, x$$

என இருக்குமாறு இணையான (parallel) x, y அளவைகளை (v, u) வரைக.

Σxy, Σx^2 என்ற அளவைகளை (w, z) இணையாக இருக்குமாறும் அதே சமயத்தில் முறையே y, x அச்சுக்களுக்கு செங்குத்தாக இருக்குமாறும் வரைக. இங்கு

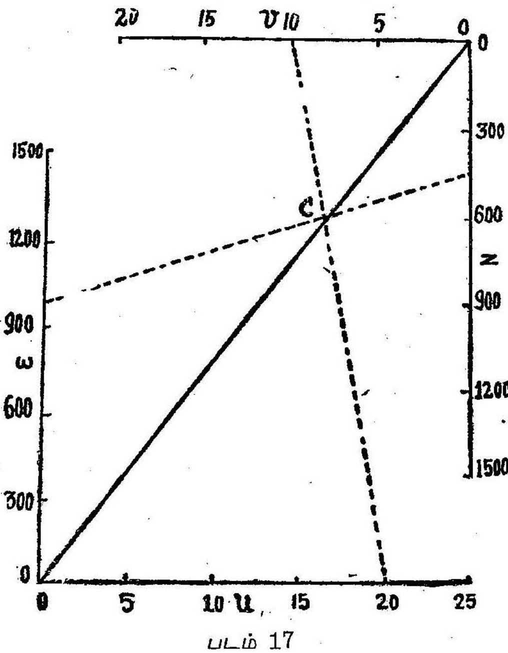
$$X_w = m_w\, w = \frac{1}{300}\,(\Sigma\, xy)$$

$$X_z = m_z z = \frac{1}{300} (\Sigma x^2)$$

என்பன அளவைச் சமன்பாடுகளாகும்.

(u_0, w_0); (v_0, z_0) என்ற இருபுள்ளிகளைச் சேர்த்து மூலை விட்டம் (diagonal line) வரைகிறோம். இம் மூலை விட்டத்தின் நீளம் எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம்.

கீழே காணும் வரைபடம் நமக்குத் தேவையான நேம வரையம் ஆகும்.



படம் 17

$$x = 10$$
$$\Sigma xy = 100$$
$$\Sigma x^2 = 500$$

என்று இருக்கும்போது y-ன் மதிப்பைக்காண $w = 1000$, $z = 500$ என்ற மதிப்புகளைச் சேர்த்து ஒரு கோடு வரைக. அது மூலை விட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி C எனக் கொள்க. இந்த புள்ளி C யையும் $x = v = 10$ என்ற புள்ளியையும் சேர்த்து நீட்டினால்

$u = 20$ என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே y-ன் மதிப்பு 20 என்றாகிறது.

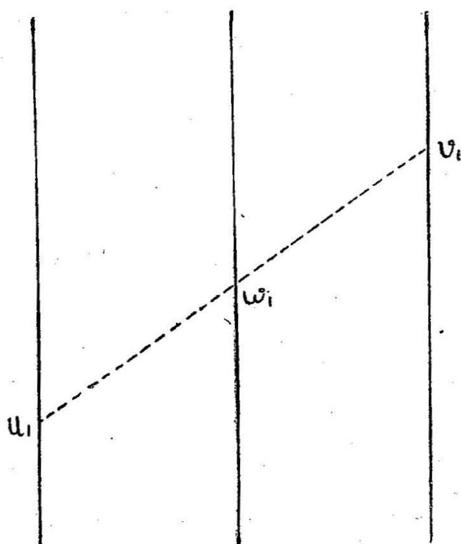
மாதிரி :

அணிக்கோவை முறை (Determinant Method)

மூன்று அளவைகள் கொண்ட ஒரு நேம வரையம் வரைக.

$u + v = w$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

u, v க்கு இரு இணையான கோடுகள் வரைகிறோம். இவ்விரு கோடுகளுக்கிடையே w-க்கு உரிய கோட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரைகிறோம்.



படம் 18

u_1 v_1 இவற்றை நேர்கோட்டால் சேர்க்க w_1 கிடைக்கிறது. இம் மூன்று புள்ளிகளும் (u_1, v_1, w_1) ஒரே கோட்டின் மேல் விழுகின்றன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. இவ்வாறு ஒரு கோட்டின் மேல் விழும் மூன்று புள்ளிகளுக்கு ஒரே கோட்டிலுள்ளவை (collinear) எனப் பெயர். இந்த ஒரு தன்மையைக் கொண்டெழுந்த, நேம வரையம் வரைவதற்குரிய, ஒரு புது முறையை (Determinant method) அணிக்கோவை முறை என்கிறோம்.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

என்பது (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்ற இரு புள்ளிகளைச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு என அறிவோம்.

(x_3, y_3) என்பது நேர் கோட்டின் மேல் உள்ள மற்றொரு புள்ளியானால் $y_3 - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$ என எழுதலாம். I

இதுதான் மூன்று புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் கீழ்க்கண்டவாறு விழுவதற்கான சமன்பாடாகும்.

(x_1, y_1) (x_3, y_3) (x_2, y_2)

இச் சமன்பாட்டை (I-ஐ) கீழ்வருமாறும் எழுதலாம்.

$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ அல்லது

$$x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 - x_1y_1 - x_3y_2 = 0$$

அல்லது $x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_3x_2 = 0$ II

இதையே
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
என்றும் எழுதலாம்.

இதுதான் மூன்று புள்ளிகள் ஒரு நேர் கோட்டின் மேல் விழுவதற்கான அணிக்கோவை அமைப்பாகும் (Determinant form).

ஆகவே $u + v = w$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நேமவரையம் வரைய முதலில் இம்மாதிரியான அணிக்கோவை அமைப்பைக் (Determinant) காணவேண்டும்.

இவ் வமைப்பில் உள்ள x_1, x_2, x_3 என்பன முறையே u, v, w என்ற கோடுகளின் ஆரம்பத்திலிருந்து (origin) உள்ள x-அச்சின் தூரங்களைக் குறிக்கின்றன. இது போலவே y_1, y_2, y_3 என்பன முறையே u, v, w என்ற கோடுகளின் மேல் உள்ள y-அச்சின் மேல் உள்ள தூரங்களைக் குறிக்கின்றன.

இந்த முறையைக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் தெளிவாக்குகின்றன.

மாதிரி 1.

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$$

என்ற ஆடி (lens) சூத்திரத்திற்கு நேம வரையம் வரைக.

இங்கு $u = 10$ லிருந்து 50 முடிய பொருளின் தூரம்.

$v = 10$ லிருந்து 50 முடிய பிம்பத்தின் தூரம்.

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இதையே

$$\frac{u+v}{uv}=\frac{1}{f} \qquad \text{அல்லது}$$

$$uf+vf=uv \qquad \text{அல்லது}$$

$$uf+vf-uv=0 \qquad (1)$$

என்றும் எழுதலாம்.

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2 = 0 \qquad (2)$$

என்ற சமன்பாட்டோடு முதல் (1) சமன்பாட்டைப் பொருத்திப் பார்த்து

$$x_1 = u \qquad y_2 = f$$

$$x_2 = f \qquad y_3 = v$$

$$x_3 = 0 \qquad y_1 = 0$$

எனக் காண்கிறோம்.

இவற்றைக் கொண்டு கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & 0 & 1 \\ f & f & 1 \\ 0 & v & 1 \end{vmatrix} = 0$$

இவ்விரண்டாம் அமைப்பின் மதிப்பைக் கண்டு, அது (1)–ஆம் சமன்பாட்டைப் போல் உள்ளது எனக் காணலாம்.

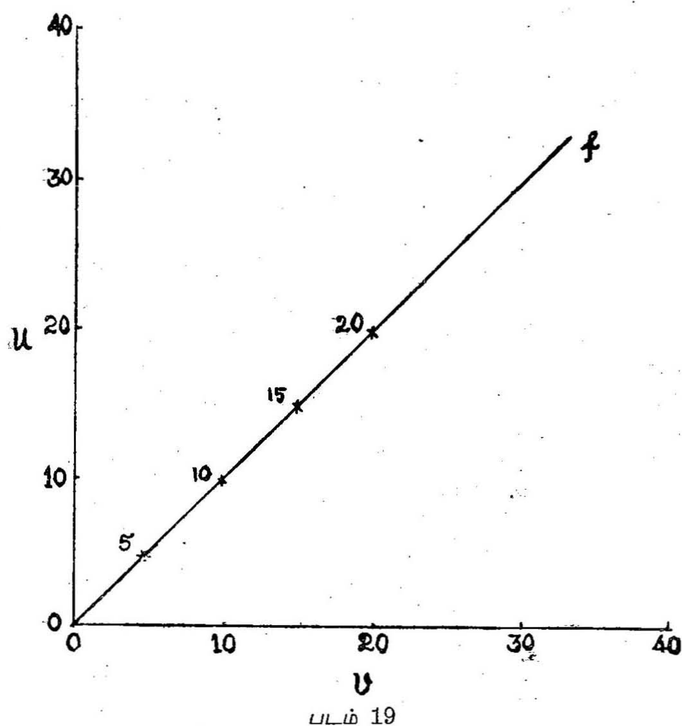
மேற்கண்ட அமைப்பில் முதல் வரிசை அல்லது நிரை (row) யில் உள்ள u, 0 வுக்கு x–அச்சு வரைகிறோம். ஏனெனில் u வின் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y–ஆயத் தொலை (y co-ordinate) பூச்சியமாகும். ஆகவே x–அச்சில் u வின் மதிப்புகளைக் (10 – 50) குறிக்கிறோம்.

இதுபோலவே மூன்றும் வரிசை (third row) யில் உள்ள (0, v) க்கு y-அச்சு வரைகிறோம். ஏனெனில் ஒவ்வொரு v யின் மதிப்பிற்கும் x–ஆயத் தொலை பூச்சியமாகும். ஆகவே y-அச்சில் v யின் மதிப்புகளைக் (10 – 50) குறிக்கிறோம்.

இவ்விரண்டு அச்சுகளுக்கும் இடையே உள்ள மூன்றுவது கோடு இரண்டாம் வரிசை (row) யில் உள்ள f, f–க்கு வரையப்பட்டதாகும். இக்கோடு x, y அச்சுக்களுக்குச் சமதூரத்தில் உள்ளது. இக்கோட்டின் மேல் உள்ள f–ன் மதிப்புகள் x, y அச்சுக்களின் u, v யின் சமமான மதிப்புகளைச் சேர்ப்பதால் கிடைத்த புள்ளிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக x-அச்சில் u–வின் 10ஐயும் y–அச்சில் v யின் 10ஐயும் சேர்த்தால் f–க்குரிய கோட்டில் வெட்டும் புள்ளியில் 5 எனக் குறிக்கிறோம். ஏனெனில்

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$u = w$, $v = w$ என்றால் $f = 5$ ஆகும்.



படம் 19

இதுதான் $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய நேம வரையம் ஆகும்.

மாதிரி 2.

$$a \sin \theta + b \cos \theta = 1$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு நேம வரையம் வரைக.

$$a \sin \theta + b \cos \theta - 1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$a = x, \quad b = y$$

எனக் கொள்க.

ஆகவே

$$x - a = 0 \qquad (1)$$

$$y - b = 0 \qquad (2)$$

$$x \sin \theta + y \cos \theta - 1 = 0 \qquad (3)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

இம் மூன்று சமன்பாடுகளும் இசைவானவை (consistant) என்ருல் கீழ்வரும் அணிக் கோவை (Determinant) பூச்சியம் ஆகும்.

ஆகவே

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ \sin\theta & \cos\theta & -1 \end{vmatrix} = 0$$

இதைத் தேவையான

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளவாறு மாற்ற முதல் இரு படுக்கை வரிசைகளை அல்லது நிரைகளை (rows) முறையே a, b யால் வகுத்துப் பின்னர் மூன்ரும் நிரலை (third column) (-1) ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

ஆகவே

$$-ab \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

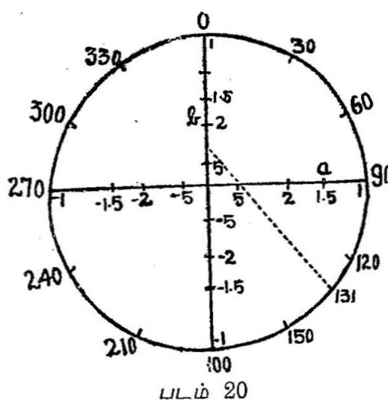
ஆனல் $-ab \neq 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

இதில் $(x_1\ y_1)$க்குப் பதிலாக $\left(\frac{1}{a}\ 0\right)$ கிடைக்கிறது. இதற்குரிய கோடு x–அச்சாகும். x-அச்சின்மேல் a-யின் நேர், எதிர் மதிப்புகள், ஆரம்பத்திலிருந்து (origin) $\frac{1}{a}$ தூரத்தில் உள்ளவாறு இரு பக்கங்களிலும் குறிக்கப்படுகின்றன.

இதுபோலவே $(x_2\ y_2)$ க்கு பதிலாக $\left(0\ \frac{1}{b}\right)$ கிடைக்கிறது. இதற்குரிய கோடு y அச்சாகும். y அச்சின்மேல் b யின் நேர் எதிர் மதிப்புகள் ஆரம்பத்திலிருந்து $\frac{1}{b}$ தூரங்களில் உள்ளவாறு இரு பக்கங்களிலும் (+ve, –ve sides) குறிக்கப்படுகின்றன.

மையம் (0, 0) ஆகவும் விட்டம் 5 செ.மீ. உள்ளதாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டத்தின்மேல் கோணங்களின் படிகள் (degrees) குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு ஆரம் $r = 2{\cdot}5$ செ.மீ. தான் ஒரு அலகு (unit) ஆகும்.



படம் 20

இதுதான் $a \sin\theta + b\cos\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு வரைந்த நேமவரையம் (nomogram) ஆகும். இதில் a, b இரண்டும் தெரிந்தால் θ வின் மதிப்பைக் காணலாம். மாதிரியாக $a=4$, $b=3$ என்றால் $4\sin\theta + 3\cos\theta = 1$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க $\theta = 131°$ என்று கிடைக்கிறது. இது x-அச்சின் $a=4$ ஐயும் y அச்சின் $b = 3$ ஐயும் சேர்த்து நீட்ட கிடைத்த மதிப்பாகும்.

பயிற்சி 12

1. $I = \frac{1}{12} bd^3$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கவும்.

$$(1'' \leq b \leq 10''),\ (1'' \leq d \leq 10'')$$

2. $M = wl^3/8,\ 10' \leq w \leq 100'$

$$5' \leq l \leq 30'$$

என்னும் சமன்பாட்டின் நேமவரையம் அமைக்கவும்.

3. சரியான அளவுகோலின் நீளத்தை எடுத்து $2{\cdot}54\ I = C$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு அடுத்துள்ள அளவுகோலும், அடுத்தல்லாத அளவுகோலும் வரைக. $0 \leq I \leq 10$.

4. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $(0 \leq r \leq 5)$ என்னும் சமன்பாட்டினை அடுத்துள்ள அளவுகோலும், அடுத்தல்லா அளவுகோலும் வரைக.

5. நழுவுச் சட்டத்தை உபயோகித்துக் கீழ்க்காணுமவற்றைக் கணக்கிடும் முறையை விவரி.

(1) $(2{\cdot}34)\ (3{\cdot}17)\ \pi$

(2) $\dfrac{(296)\ (0{\cdot}197)\ (105)}{(\tan 31{\cdot}6°)\ (\sin 2°)}$

(3) $(7{\cdot}61)\ \sqrt[3]{7{\cdot}61}\ \pi$

6. நழுவுச்சட்டத்தை உபயோகித்து கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறையை விவரி.

(1) $\tan x = 5{\cdot}7$

(2) $e^{3x^2+1} = 15$

(3) $5x^3 + 2x^2 + 1 = 0$

(4) $2 \tan x + 5 = 0.$

7. நழுவுச்சட்டத்தை உபயோகித்துக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைத்தீர் :

(1) $x = 30 \log_{10} x$

(2) $x^4 = 43$

(3) $800\, x^4 - 102x^2 - x + 3 = 0$

8. நழுவுச்சட்டத்தை உபயோகித்துக் கீழ்வருவனவற்றைக் கண்டுபிடி.

(i) $\dfrac{\sqrt{86{\cdot}2} \times 35 \times 10{\cdot}68}{98 \times 57}$

(ii) $\dfrac{12{\cdot}9 \times \sin 54^\circ}{\tan 12^\circ \times \cos 38^\circ}$

(iii) $\cosh (3{\cdot}2)$

9. கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கவும்.

$$S = 3\sqrt[3]{x} + 4y. \qquad 1{\cdot}1 \leq x \leq 2{\cdot}0$$

$$0{\cdot}1 \leq y \leq 1{\cdot}0$$

$S = 4{\cdot}8,\ x = 1{\cdot}7$ ஆக இருக்கும்பொழுது y ன் மதிப்பென்ன? (ஏப்ரல் 1968)

10. Sest $= Sy\sqrt{1 - r^2}$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு நேம வரையம் அமைக்கவும்.

$$0 \leq \text{Sest} \leq 20$$

$$0 \leq Sy \leq 20$$

$$0 \leq r \leq 1$$

விடைகள்

பயிற்சி 1 (பக்கம் 32)

1. (1) $a^x(a^h-1)$ (2) $2bhx+bh^2$ (3) $2/x(x-1)(x-2)$ (4) $6-8x/(x+1)(x+2)(x+3)$ 2. -90 5. 2·24563 8. (b) 151·472 9. (1) $2ahx+ah^2+bh$ (2) $2ah^2$ (3) 0 11. 12, 68 12. 169·33 13. 32, -16767 15. (a) 0·9975 (b) 0·99750156 16. 875·236719 17. 0·29468. 18. 27·85 19. 19·84167 20. 14·0 21. 0·01625 23. (1) $e^{ax}(e^{ah}-1)^n$ (2) $a^{x+b}(a^h-1)^n$.

பயிற்சி 2 (பக்கம் 69)

1. 118, 2648 3. 49·3079 4. 147, 93 8. 0·260625, 0·968125 9. 3·215559 10. x^4 11. 41·5216 12. 25·0 15. 0·05001465 16. 4·575 17. 77·43 18. 15·66 20. 30·0 21. 0·73725 22. $2{\cdot}0-10{\cdot}2x+8{\cdot}5x^2-1{\cdot}65x^3+0{\cdot}1x^4$ 23. 3667·0558.

பயிற்சி 3 (பக்கம் 98)

1. 0·01625 4. 2·6909917 5. 6·3932 6. 0·86123211 7. 0·43618513 10. 51·6416 12. 14·93222 13. 2959·36 14. 0·25.

பயிற்சி 4 (பக்கம் 120)

1. 1·2134116 2. 0·332 3. 0·476936 4. 1·4142 6. 886 7. 3·5914058 8. 53·7 9. 3·091 10. 2·2.

பயிற்சி 5 (பக்கம் 140)

1. 5060, 4997, 4931, 4862, 4791, 4716, 4639, 4559, 4477.

2. 2·60206, 2·60314, 2·60423, 2·60531, 2·60638, 2·60746, 2·60853, 2·60959, 2·61066, 2·61172.

4. 0·38511, 0·39169, 0·39841, 0·40527.

7. 41·0, 39·8, 48·1, 63·0.

10. $\delta\ f(0)=(0{\cdot}2\Delta-0{\cdot}08\Delta^2+0{\cdot}048\Delta^3-0{\cdot}0336\Delta^4)\ f(0)$,
$\delta^2\ f(0)=(0{\cdot}04\Delta^2-0{\cdot}032\Delta^3+0{\cdot}0256\Delta^4)\ f(0)$
$\delta^3\ f(0)=(0{\cdot}008\Delta^3-0{\cdot}0096\Delta^4)\ f(0)$.

பயிற்சி 6 (பக்கம் 162)

1. $\frac{49}{16}\cdot e^{1/2}$ 2. $3n$

4. (*a*) 166·375 (*b*) $-0{\cdot}015625$

8. $10x^{(4)}+69x^{(3)}+102x^{(2)}+31x^{(1)}-18$
$\Delta\ f(x)=40x^{(3)}+207x^{(2)}+204x^{(1)}+31$
$\Delta^2 f(x)=120x^{(2)}+414x^{(1)}+204$
$\Delta^3 f(x)=240x^{(1)}+414$
$\Delta^4 f(x)=240$
$\Delta^5 f(x)=0$

9. $A_3\frac{x^{(4)}}{4}+(A_2+3A_3)\frac{x^{(3)}}{3}+(A_1+A_2+A_3)\frac{x^{(2)}}{2}+A_0\,x^{(1)}+A_4$.

10. (*a*) $3\frac{x^{(4)}}{4}+11\frac{x^{(3)}}{3}+6\frac{x^{(2)}}{2}+10x^{(1)}+A_4$

(*b*) $\frac{x^{(3)}}{3}+5x^{(2)}+25x^{(1)}+A_3$

12. $2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10$

13. $11x^{(4)}+71x^{(3)}+94x^{(2)}+19x^{(1)}-15$

$\triangle f(x)=44x^{(3)}+213x^{(2)}+188x^{(1)}+19$

$\triangle^2 f(x)=132x^{(2)}+426x^{(1)}+188$

$\triangle^3 f(x)=264x^{(1)}+426$

$\triangle^4 f(x)=264$

$\triangle^5 f(x)=0$

பயிற்சி 7 (பக்கம் 173)

1. 1·1, 2·1, −0·2.

2. 1·355, $-0·5\pm2·325$.

3. 2·965, $-1·4825\pm3·095i$.

4. $x=2$.

5. −1, −1, 3.

பயிற்சி 8 (பக்கம் 208)

1. 2·731819 2. 2·153157 3. −0·649416 4. 4·546

5. −3·9087 6. 2·047926 7. 1·99737 9. 2·76885

11. 9·88601 12. 6·250000 13. 1·1088008 14. 0·476936

15. $\begin{cases} x=3·4782 \\ y=2·26154 \end{cases}$ 16. 3·7893 17. 4·860806 18 2·73205

19. 1·3819659 20. 158·0 21. 0·57936 22. 0·60710381

பயிற்சி 9 (பக்கம் 248)

1. 0·03560 2. 0·00200005; −0·000004; 0·001988117
−0·000003865. 3. 11·330214715; −0·0019788672

4. 1·983581 ; 2·98652 ; 2·0747023 ; 3·065875. 5. 27·167

6. $-0·9942$; 1·25 7. 433·1906 ; $-34·2924$ 8. $-0·27279$; 0·274918.

பயிற்சி 10 (பக்கம் 263)

1. நீசம். $f(-1) = -0·25$; $f(+1) = -0·25$.
   உச்சம். $f(0) = 0$.

2. நீசம். $f(3·1) = -0·2025$.
   உச்சம். $f(1·042) = 0·250004$.

5. நீசம் $f(0·41476) = -0·38552$.

6. நீசம் $f(2·54858) = 0·4663$.

8. 1·46657.

9. நீசம் $f(0·462) = 0·885596$.

பயிற்சி 11 (பக்கம் 350)

1. 0·693147 2. 0·562216 3. 0·78539822 4. 0·005062648

5. 13·80526026 6. 8·36965345 7. 29·492795

9. 0·4812219 10. 0·000154539 11. 135·85511084

12. 0·04879016 ; 0·048790165 13. 0·001670775 14. 220825

15. 0·0102512

———

கலைச்சொற்கள்

A

Add – கூட்டு
Addition – கூட்டல்
Adjacent scale - அடுத்துள்ள அளவுகோல்
Alignment chart – இணைப்பு விளக்கப்படம்
Analysis - பகுப்பாய்வு
Approximate – தோராயமான
Approximation – தோராயம்
—Successive – அடுத்தடுத்த தோராயம்
Argument – சார்பு மாறி
Arithmetic - எண்கணிதம்
Arithmetic mean – கூட்டுச் சராசரி
Assumption – தற்கோள்
Axis – அச்சு

B

Binomial distribution – ஈருறுப்புப் பரவல்
Bisect – இருசமக் கூறிடு

C

Calculate - கணக்கிடு
Calculus – நுண்கணிதம்
—Differential – வகை நுண் கணிதம்
—Integral – தொகை நுண் கணிதம்
Central difference – மைய வேறுபாடு
Change of axis – அச்சு மாற்றம்
Changing the limits - எல்லைகள் மாற்றம்
Change of scale and origin – அலகும் ஆரம்பமும் மாற்றம்
Class – பிரிவு
Class interval - பிரிவு இடைவெளி
Coefficient – குணகம், கெழு
Coincide – ஒன்றுபடு
Collinear – ஒரே கோட்டிலுள்ள, ஒரே கோட்டுமை
Combination - தொகுதி சேர்க்கை
Column - நிரல்
Commutative law - பரிமாற்று விதி
Complementary angle - நிரப்புக்கோணம்
Computation – கணிப்பு
Consecutive - அடுத்தடுத்த
Consistant - இசைவான, பொருத்தமான
Constant - மாறிலி
Continuous - தொடர்ச்சியான
Coordinates – ஆயத்தொலைகள்
Cross multiplication - குறுக்குப் பெருக்கல்
Cubic equation - முப்படிச் சமன்பாடு
Cursor – காட்டி

D

Decennial – பத்துப்பத்தாக
Define – வரையறு
Definition - வரையறை
Degree – படி
Derive - வருவி
Derivation - வருவிப்பு
Determinant-அணிக்கோவை
Differences - வேறுபாடுகள், வித்தியாசங்கள்
—Advancing – முன்னேறு வேறுபாடுகள்
—Forward - முன்னணி அல்லது முற்போக்கு வேறுபாடுகள்

—Backward - பின்னணி வேறுபாடுகள்
—Central - மையவேறு பாடுகள்
—Divided - வகுபட்ட வேறுபாடுகள்
Difference Table - வேறுபாட்டட்டவணை
Differences of zero - பூச்சியத்தின் வேறுபாடுகள்
Differentiation - வகைப்படுத்துதல், வகையிடல், வகை வேறுபாடு காணல்
—Partial - பகுதி வகை வேறுபாடு காணல்
—Successive - அடுத்தடுத்து வகைவேறுபாடு காணல், தொடர்ந்த வகையீடு
—Numerical - எண்சார் வகை வேறுபாடு காணல்
Differentiate - வகைப்படுத்து, வகைவேறுபாடு காண
Differential coefficient - வகைக் கெழு; வகையீட்டுக்குணகம்
Digit - இலக்கம்
Distributive law - பங்கீட்டு விதி

E

Elimination – நீக்கம்
Elimination of third differences - மூன்றும்படி வேறுபாடுகளின் நீக்கம்
Entry - சார்பலன்
Equation – சமன்பாடு
Establish - நிறுவுக, அமை
Establishment – நிறுவனம்
Estimate – மதிப்பிடு
Estimation – மதிப்பிடல், மதிப்பீடு
Evaluate - கணக்கிடு
Evaluation - கணக்கிடல், கணக்கீடு
Example – மாதிரி, எடுத்துக் காட்டு
Extend - விரிவாக்கு, நீட்டு
Extension – விரிவாக்கம், நீட்பு
Extension rule – விரிவாக்க விதி, நீட்புவிதி
Extrapolate – புறமதிப்புக் காண்
Extrapolation - புறமதிப்பிடல்

F

Factorial – காரணீயப் பெருக்கம்
Factorial notation – காரணீயக் குறியீடு
Factor(s) – காரணி(கள்)
False position - பிழைநிலை
Formula – சூத்திரம்
—interpolation – இடைச்செருகல் சூத்திரம்
—Integration – தொகைச் சூத்திரம்
—Differentiation – வகை வேறுபாட்டுச் சூத்திரம்
Function – சார்பு
Functional scale–சார்பளவை

G

Graph - வரைபடம்
Graphic scale - வரையளவு கோல்
Graphical method - வரைபட முறை
Graph sheet - வரைபடத் தாள்
Graphical solution - வரை படத்தீர்வு

H

Higher order - மேல்நிலை, உயர்நிலை
Horner's method – ஓணரின் முறை

I

Interval - இடைவெளி
—equal- சம இடைவெளி
—unequal - அசம இடைவெளி
Imaginary root - கற்பனை மூலம்
Infinite series - முடிவிலாத் தொடர்
Integer - முழுஎண்
Integral - தொகை
Integrand - தொகை ஆக்கக் கூறு
Integrate - தொகைப்படுத்து, தொகைகாண்
Integration - தொகைகாணல்
Interpolate - இடைச் செருகு
Interpolation - இடைச்செருகல்
—Inverse - எதிர்மார் (அல்) தலைகீழ் இடைச் செருகல்
Interpolation formula - இடைச்செருகல் சூத்திரம்
Index - குறியீடு
Iterative process - தொடர் முறைக்கணிப்பு, படிப் படியானமுறை

L

Law - விதி
Law of indices - அடுக்குகளின் விதி, படிக்குறி விதி
Limits - எல்லைகள்
Logarithms - மடக்கைகள்
Logarithmic chart - மடக்கைப் படம்

M

Maximum - மீப்பெரு உச்சம்
Method of induction - தொகுத்தறிமுறை
Minimum - நீசம், மீச்சிறு
Negative number - எதிர் எண்

N

Nomogram - நேமவரையம்
Nomography - நேமவரை படமுறை
Nonadjacent scale - அடுத்தல்லாத அளவுகோல்
Numerical mathematics - எண் சார் கணிதம்
,, interpolation - எண்சார் இடைச்செருகல்
,, Differentiation - எண் சார் வகை காணல்
,, integration - எண்சார் தொகைகாணல்
,, solution - எண்சார் தீர்வு

O

Operator - செயலி
Origin - ஆரம்பம்

P

Polynomial - பல்லுறுப்புக் கோவை
n th degree polynomial-n ஆம்படி பல்லுறுப்புக் கோவை
Positive number - நேரெண்
Probability - நிகழ்தகவு
Proof - நிறுவல்
Proportion - விகிதசமம்
Prove - நிருபி

Q

Quinquennial - ஐந்தைந்தாக

R

Regression equation - தொடர்பு சமன்பாடு
Raphson method - ராப்ஸனின்முறை
Regression - பின்னடைவு
Remainder term - மீதிஉறுப்பு
Repeated plotting - திரும்பத் திரும்ப வரைதல்

Root-மூலம்
—real - மெய்மூலம்
—imaginary - கற்பனை மூலம்
—square - வர்க்கமூலம்
—cube - கனமூலம்
—positive - நேர்மூலம்
—negative - எதிர்மூலம்
Rounding off - முழு எண்ணாக்கல்
Rule - விதி

S

Scale equation - அளவைச் சமன்பாடு
Scale modulus - அளவையெண்
Separation of symbols - குறிகளைப்பிரித்தல்
Slide rule - நழுவுச்சட்டம், நழுவுகோல்
Solution - தீர்வு
Solve - தீர், தீர்வுகாண்
Subdivision of intervals - இடைவெளிப்பகுப்பு
Substitute - பிரதியிடு, பிரதியீடு (N)
Subscript - கீழ்குறி
Successive approximation - அடுத்தடுத்த தோராயம், படிப்படியான தோராயம்
Successive differentiation - படிப்படியாக வகைகாணல்
Summation - கூட்டல்
Summation of series - தொடரின் கூட்டல்
Symbol - குறி
Symmetrical function - சமச்சீர் சார்பு
Symmetrical property - சமச்சீர் தன்மை

T

Term by term integration - தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல்
Trapezium - சரிவகம்
Trapezoidal rule - சரிவக விதி, கோடகம் சார்ந்த விதி
Trial and error method - பட்டறி முறை
Trisection method - முப்பாகு பாடுமுறை, முக்கூறு முறை

V

Value - மதிப்பு
Variable - மாறி

W

Width of the interval - இடைவெளித்தூரம்

Z

Zero - பூச்சியம்